João Francisco Pinto Lucas
Leandro Gustavo Gomes

A projeção canônica entre Estruturas Riemaniannas e Complexas em Superfícies

Ano 2021

João Francisco Pinto Lucas
Leandro Gustavo Gomes

A projeção canônica entre Estruturas Riemaniannas e Complexas em Superfícies

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes editoriais
Natalia Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os autores

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

A projeção canônica entre estruturas riemaniannas e complexas em superfícies

Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Autores: João Francisco Pinto Lucas
Leandro Gustavo Gomes

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L933 Lucas, João Francisco Pinto
A projeção canônica entre estruturas riemaniannas e complexas em superfícies / João Francisco Pinto Lucas, Leandro Gustavo Gomes – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-364-1
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.641210508

1. Geometria riemanniana. 2. Superfícies de Riemann. 3. Teorema da uniformização de Riemann. 4. Relações entre estruturas Riemannianas e Complexas. I. Lucas, João Francisco Pinto. II. Gomes, Leandro Gustavo. III. Título.
CDD 516.92

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

Ano 2021

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

Dissertação submetida ao Programa de Poó–Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Matemática

Dissertação aprovada por banca examinadora em 09 de março de 2017, conferindo ao autor o título de Mestre em Ciências em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leandro Gustavo Gomes (Orientador)-Unifei

Prof. Dr. Bráulio Augusto Garcia-Unifei

Prof. Dr .Jaime Leonardo Orjuela Chamorro-UFBA

Este trabalho é dedicado ao meu músico preferido: Anthony Philip Harford, o "Tony Martin".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradeçer inicalmente à energia vital, na qual sinto a presença de Deus, que me manteve de pé todos esses anos e que nunca me deixou sentir fraco, mesmo quando mereci. Gostaria de agradeçer também minha mãe Maria Luisa e meu pai Francisco que tanto se dedicaram para que eu pudesse estudar, fazer o que gosto e não passar pelas mesmas dificuldades que enfrentaram ao longo da vida. Agradeço muito ao companheirismo e apoio do meu irmão Pedro Henrique, que esteve boa parte do tempo ao meu lado durante minha estadia na universidade. Agradeço também pelos 16 anos de amizade e fidelidade do meu cachorro Billy, voçê também é um membro da família! Em memória de minhas avós Esther e Rosa, as quais sinto muita falta. Cada dia é uma lição em aprendar a não mais tê-las, mesmo tendo consciência de que isso é temporário. Gostaria de agradeçer meu orientador, professor e amigo Leandro Gustavo Gomes por toda sua atenção, dedicação e também por me apresentar com muita clareza a teoria das superfícies de *Riemann* e suas conexões com a geometria de superfícies, um tema que reúne vários aspectos diferentes da matemática os quais muitos eu ainda não conhecia. Sem ele compreender tais aspectos não seria possível. Agradeço também as sugestões e observações feitas pelos professores Bráulio Augusto Garcia e Jaime Leonardo Orjuela Chamorro que ajudaram no aperfeiçoamento deste trabalho. Finalmente gostaria de agradeçer a todo o apoio financeiro recebido pela Fapemig, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, não só durante meus dois anos de mestrado mas como nos meus dois anos de iniciação científica. Serei eternamente grato...

“Eles choram a noite inteira e amaldiçoam o beijo que transforma amor em vazio para sempre... eu pensei que nós vivêssemos como galhos na mesma árvore... Por favor não tire a única coisa que me pertence...!!! Por que amar?”

Tony Martin - Why Love? - Back Where I Belong - 1992.

SUMÁRIO

RESUMO

Neste trabalho descreveremos parte da teoria das superfícies de *Riemann* e sua conexão com a geometria *Riemann*iana. A teoria naturalmente descreve a transposição da holomorfia em uma variável complexa para o contexto da geometria, que recebe o nome de geometria complexa. Alguns resultados apresentados vão além da teoria das superfícies bidimensionais e adquirem um aspecto bastante abrangente. O teorema da uniformização de *Riemann* será apresentado, o qual nos permite classificar as diferentes classes dessas superfícies. No final será apresentada a projeção canônica de uma métrica *Riemann*iana sobre sua correspondente estrutura complexa, bem como algumas de suas propriedades importantes e aplicações.
PALAVRAS–CHAVE: Superfícies de *Riemann*, teorema da uniformização de *Riemann*, relações entre estruturas *Riemannianas* e Complexas.

ABSTRACT

In this paper we will describe part of the theory of *Riemann* surfaces and its connection with *Riemann*ian Geometry. The theory naturally describes the transposition of holomorphy in one complex variable to the context of geometry, which is called complex geometry. Some results presented here go beyond the theory of two-dimensional surfaces and acquire a rather comprehensive appearance. The *Riemann*'s uniformization theorem will be presented, which allow us to classify the different classes of such surfaces. Before finishing the dissertation, the canonical projection of a *Riemann*ian metric onto its correspondent complex structure will presented, as well as some of its important properties and applications.
KEYWORDS: *Riemann* surfaces, *Riemann*'s uniformization theorem, relations between Complex and Rieman- nian structures.

INTRODUÇÃO

A teoria das superfícies de *Riemann* deu-se início com o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard *Riemann* (1826-1866). Inicialmente, de uma maneira bastante heurística, *Riemann* propôs um modelo geométrico para tornar funções multivalentes que naturalmente surgem da teoria da análise em uma única variável complexa (como $\log(z)$, $\sqrt[n]{z}$, $tg^{-1}(z)$, $\tanh^{-1}(z)$) em funções univalentes agora não com domínio em $\mathbb{C}$ mas sim nessa "estrutura" geométrica a qual consistia de "n-cópias" do plano $\mathbb{C}$ onde o número n dependia exclusivamente da função estudada. Posteriormente, essas cópias foram chamadas de "folhas" que constituiam tal estrutura geométrica. A teoria das funções holomorfas é conhecida por sua rigidez e capacidade de se conectar com outras áreas que, a priori, são independentes. A estrutura conforme dessas funções pode ser transportada para o contexto da geometria por meio da estrutura de variedade complexa. Como toda teoria matemática que surgiu de maneira heurística, a teoria das superfícies de *Riemann* posteriormente adquiriu um aspecto abstrato e nos dias de hoje é uma área independente da Análise Complexa no sentido de que usa técnicas de diversos ramos do conhecimento para estudar seus problemas naturais, como por exemplo, a álgebra,a topologia e até mesmo elementos de teoria dos números. O primeiro passo para essa abstração foi o advento das funções elípticas. Como caso clássico temos a função $\wp$ de Weierstrass, uma função meromórfa, com pólo duplo e com dois períodos linearmente independentes sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$, que é dada por

$$\wp(u) := \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda/\{0\}} \left(\frac{1}{(u-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

onde Λ é um reticulado em $\mathbb{C}$.

Neste trabalho apresentaremos a classificação das superfícies de *Riemann* por meio do Teorema da Uniformização de *Riemann*. Ele afirma, dentro de um certo sentido (a menos do que chamamos de biho- lomorfismos), que existem apenas três tipos de superfície de *Riemann*: As elípticas, as parabólicas e as hiperbólicas. Ambos os casos estão relacionados a superfícies de curvatura constante, que é positiva, nula ou negativa, respectivamente. O teorema da uniformização em si não implica as condições anteriores, mas é possível relaciona-las com a estrutura complexa das superfícies de *Riemann* por meio do conceito de métrica *Riemann*iana, que generaliza a noção de produto interno euclidiano para variedades. Para isso é necessário introduzir o conceito de "estrutura complexa" em uma variedade. Inicalmente isso é feito definindo um objeto (mais precisamente, um endomorfismo linear) em um espaço vetorial real V , $\dim(V) = 2n$, $J : V \to V$ que satisfaz a condição $J^2 = -Id_V$ e transportar essa propriedade para o espaço tangente a uma variedade M em um ponto $p \in M$ denotado por T_pM que naturalmente carrega uma estrutura de espaço vetorial. Queremos, de certa forma, entender de qual maneira as estruturas complexas e as métricas *Riemannianas* estão relacionadas. Faremos isso no seguinte sentido: dada uma superfície orientada M, definimos

$\mathcal{RM}(M)$:= espaço das métricas *Riemannianas* sobre M

$\mathcal{CS}(M)$:= espaço das estruturas complexas sobre M

e consideramos a aplicação $\mathcal{J} : \mathcal{RM}(M) \to \mathcal{CS}(M)$ dada por $\gamma \to \mathcal{J}[\gamma]$ onde, se em coordenadas temos

$$\gamma = \sum_{i,j=1}^{2} \gamma_{ij}\, dx^i dx^j = E(dx^1)^2 + 2F dx^1 dx^2 + G(dx^2)^2 \,. \tag{1}$$

então

$$\mathcal{J}[\gamma] := \tfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} -F & E \\ -G & F \end{pmatrix} \;.$$

Nosso objetivo neste trabalho é estudar algumas propriedades de tal aplicação com a finalidade de colocar as relações entre estruturas complexas e *Riemannianas* em superfícies sob uma perspectiva, diferente do que usualmente é apresentado na literatura da área. Podemos listar como as duas principais contribuições deste material:

(i) Estudo da diferenciabilidade de $\mathcal{J}[\gamma]$: observa-se que $\mathcal{CS}(M)$ não tem estrutura de espaço vetorial, pois as operações de soma de estruturas complexas e multiplicação de uma estrutura complexa por um escalar não necessariamente resultam em uma nova estrutura complexa. Analogamente para $\mathcal{RM}(M)$. Porém, $\mathcal{RM}(M)$ é subconjunto do espaço das formas bilineares simétricas sobre M denotado por $\mathcal{B}(M)$ e $\mathcal{CS}(M)$ é subconjuto de $\mathcal{T}_1^{\,1}(M)$, o espaço dos campos tensoriais 1-covariantes e 1-contravariantes. Ambos $\mathcal{B}(M)$ e $\mathcal{T}_1^{\,1}(M)$ tem estrutura de espaço vetorial. Isto nos permite introduzir uma noção de diferenciabilidade para $\mathcal{J}$. De forma explícita, para $b \in \mathcal{B}(M)$ e $J^i_{\ k} := \mathcal{J}[\gamma]^i_{\ k}$ (veja equação (3.50)):

$$(d\mathcal{J}[\gamma]\cdot b)^i_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,\ell=1}^{2} \gamma^{\ell j}\, b_{\ell j}\right) J^i_k - \sum_{j,\ell=1}^{2} \gamma^{i\ell}\, b_{\ell j} J^j_k \,. \tag{2}$$

(ii) Mostraremos como transferir o teorema da uniformização de *Riemann* para o teorema geométrico da classificação de superfícies orientadas com curvatura constante usando $\mathcal{J}$. Nesse sentido, o trabalho apresenta o aspecto de reorganizar fatos conhecidos das geometrias complexa e *Riemann*iana e reapresenta-los sobre um novo cenário, conectando-as, no sentido de que quando identificamos uma métrica *Riemann*iana com uma estrutura complexa possibilitamos entender uma superfície *Riemann*iana com uma superfície de *Riemann*. Em contrapartida, mostraremos também que toda superfície de *Riemann* admite uma métrica *Riemann*iana de curvatura constante.

Este trabalho é dividido em três capítulos. O primeiro é dedicado a uma introdução à teoria das superfícies de *Riemann*, isto é, descrevemos seus conceitos elementares e alguns exemplos. Já no segundo apresentaremos o teorema da uniformização de *Riemann*, bem como as ferramentas para entende-lo. Finalmente no terceiro vamos estudar a conexão entre superfícies de *Riemann* e superfícies *Riemannianas* através da função

$\mathcal{J}$. Espera-se do leitor noções de cálculo em uma variável complexa, topologia básica, geometria diferencial elementar e uma noção de variedade e seus espaços tangentes. Por completude, no apêndice A colocamos o que é necessário de cálculo tensorial.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO ÀS SUPERFÍCIES DE *RIEMANN*

Este capítulo corresponde a um primeiro passo na teoria das superfícies de *Riemann*. A teoria teve origem no estudo de funções complexas de uma única variável complexa e, hoje em dia, é um ramo vasto da matemática, com aplicações em várias áreas. Inicialmente as superfícies de *Riemann* foram introduzidas para resolver o problema da descontinuidade das funções holomorfas ao longo do semi-eixo real negativo. Funções importantes que naturalmente surgem na teoria da Análise Complexa, como o logarítimo e a raiz quadrada, possuem este tipo de descontinuidade. Mais do que isso, também em um primeiro momento, as Superfícies de *Riemann* foram utilizadas para se resolver os problemas da multivalência em funções que também aparecem naturalmente do contexto da Análise Complexa. A idéia das superfícies de *Riemann*, neste então primeiro momento, é a de não eliminar o semi-eixo real negativo(pois queremos calcular o valor do logaritmo e da raiz quadrada, por exemplo, nesses pontos) mas sim introduzir os ramos que definem as folhas de *Riemann*. Construir e entender a relação dessas folhas, em geral, não é tarefa fácil, pois uma mesma função pode perfeitamente admitir mais de uma superfície de *Riemann*.

Neste capítulo introduziremos os conceitos iniciais para o entendimento da teoria das Superfícies de *Riemann*. Iremos entendê-las como casos particulares de estruturas mais gerais, as variedades complexas.

Assumimos que o leior tem um pequeno conhecimento prévio de elementos da teoria das funções de uma e várias variáveis complexas, e de variedades reais.

Relembramos rapidamente uma definição elementar da Topologia Geral que nos será útil: Consideremos dois espaços topológicos M e N e uma função $f : M \to N$. Dizemos que f é dita ser um homeomorfismo se for contínua, inversível com inversa f^{-1} também contínua. Dizemos também que a função f é um homeomorfismo local se existir uma vizinhança U em torno de cada ponto $p \in M$ tal que a restrição $f|U$ é um homeomorfismo de U em sua imagem $f(U) \subset N$.

1.1 FUNÇÕES HOLOMORFAS

Denotemos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e, para $n \in N$, o espaço $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto das n-uplas de números complexos

$$z = (z_1, ..., z_n) = x + \boldsymbol{i}y, \qquad x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sua topologia é induzida do produto hermitiano $z \cdot \bar{z} := z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n$, onde $\bar{z}$ representa o complexo conjugado $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$.

Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma aplicação $f = u + iv : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é dita ser holomorfa em U se para cada $z \in U$, f satisfaz as equações de *Cauchy-Riemann*, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(z) = \frac{\partial v}{\partial y_i}(z) \qquad e \qquad \frac{\partial v}{\partial x_i}(z) = -\frac{\partial u}{\partial y_i}(z) \quad , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Podemos generalizar este conceito para funções vetoriais da seguinte maneira: dado um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, uma aplicação

$$g = (g_1, ..., g_n) : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \tag{1.2}$$

é chamada holomorfa se cada função g_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, for holomorfa.

Uma condição necessária e suficiente para que uma função seja holomorfa é que ela não dependa da variável conjugada $\bar{z}$. Mais precisamente, definindo

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} := \frac{\partial f}{\partial x_k} + \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial y_k} \tag{1.3}$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} + \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x_k} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial u}{\partial y_k} + \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial y_k}, \tag{1.4}$$

então f é holomorfa se, e só se,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.1. A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $z \to |z|^2$ não pode ser holomorfa pois $|z|^2 = z\bar{z}$, isto é, depende da variável conjugada $\bar{z}$.

Exemplos importantes de funções holomorfas são obtidos a partir de funções elementares ou Liouvillianas, isto é, funções de uma única variável complexa que são combinações de um número finito de operações aritiméticas e composições com exponenciais, logaritmos, trigonométricas, hiperbólicas e soluções de equações algébricas. Tais tipos de funções são de fundamental importaˆncia na teoria das superfícies de *Riemann*. Como construiremos superfícies de *Riemann* a partir dessas funções, precisamos descrever suas principais propriedades.

Exemplo 1.2. A função exponencial exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é definida por $\exp(z) = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\,\text{sen}(y))$. Suas principais propriedades são:

1. $exp(z + w) = exp(z)exp(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.
2. $exp(z) \neq 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
3. $|exp(z)| = exp(Re(z))$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
4. $exp(z)$ é periódico de periodo $2\pi i$.
5. $exp(z) = 1$ se, e só se, $z = 2\pi n i$ para algum $n \in \mathbb{Z}$.

6. Seja y_0 um número real fixo. Considere o conjunto

$$A_{y0} := \{z = x + iy;\ x \in \mathbb{R},\ y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}.$$

Então, exp(z) é uma função bijetora de A_{y0} em $\mathbb{C}/\{0\}$.

7. A função exp(z) é inteira (holomorfa em todo $\mathbb{C}$) e $exp'(z) = exp(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

8. $exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ em todo $\mathbb{C}$, em torno de $z_0 = 0$.

Exemplo 1.3. Considere o conjunto $A := \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x \leq 0,\ y = 0\}$. Definimos a função logaritmo log : $\mathbb{C}/A \to \mathbb{C}$ como sendo $\log(z) := \log|z| + i\theta$ onde $\theta = \arg(z) \in (t_0, t_0 + 2\pi)$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Quando $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$, diremos que o log(z) está definido em seu ramo principal.

Algumas das propriedades de log(z) são:

1. A função log(z) é a inversa da função exponencial exp(z) no sentido de que, dado um ramo qualquer onde log(z) está definido então, $e^{\log(z)} = z$. Além disso, se escolhermos um ramo no intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi)$ então, $\log(\exp(z)) = z$ para $z = x + iy$, com $y \in [y_0, y_0 + 2\pi)$.

2. $\log(z_1.z_1) = \log(z_1) + \log(z_1) \bmod 2\pi i$.

3. Em seu ramo principal a função log(z) é holomorfa e $\log'(z) = 1/z$.

4. No ramo principal $\log(z + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ cujo domínio de convergência é o disco unitário centrado na origem $\mathbf{D}(0, 1)$, em torno de $z_0 = 0$.

5. O conjunto $B = \mathbb{C}/A$ é o maior conjunto no qual podemos definir o ramo principal de log(z), isto é, dado um conjunto $B \subseteq C$ então não podemos definir um ramo principal para log(z) pois neste conjunto a função arg(z) não pode ser contínua e, portanto, log(z) também não é.

Exemplo 1.4. A função potência z_1^{z2} onde z_1, z_2 são números complexos, $z_1 \neq 0$, é $z_1^{z2} := e^{z2 \log(z_1)}$. Assim, a raiz quadrada se torna um caso particular de função potência, $z^{1/2} = \sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} i\theta}$.

Seja $b \in \mathbb{Z}$. Desse modo, dado $a \in \mathbb{C}$, a^b está bem definida (tem único valor) independentemente do ramo escolhido. Reciprocamente, se a^b está bem definido então $b \in \mathbb{Z}$. Seja agora $b \in \mathbb{Q}$. É suficiente considerar o caso em que $b = 1/n$. Então, como consequência da fórmula de de Moivre, $a^{1/n}$ tem exatamente n determinações distintas. Caso b seja irracional então, a^b tem um número infinito (contável) de determinações.

Podemos observar que a definição de função potência é equivalente a

$$\log(z_1^{z_2}) = z_2 \log(z_1) \tag{1.6}$$

que, para z_1 estritamente positivo e z_2 real, é uma fórmula familiar da análise real. A definição que demos sugere uma extensão natural da noção de potência real de números positivos, que mantém a propriedade descrita acima. Esse fato é conhecido como Princípio da Conservação das Propriedades Funcionais, que também foi usado de alguma maneira para definir as outras funções elementares. Este princípio é usado muitas

vezes na matemática e aparecerá novamente quando falarmos sobre estruturas complexas em variedades. Além disso, devemos notar que o número complexo $z_1 \log(z_2)$ é uma das possíveis soluções w de

$$z_1^{z_2} = e^w. \tag{1.7}$$

Outras ráızes existem e o conjunto formado por elas é dado pelos possíveis valores de $\log(z_1^{z2})$, $z_1 \log(z_2) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Como o logaritmo é uma função multivalente, z_1^{z2} é, em geral, multivalente com o mesmo ponto de "ramificação" (no caso, o ponto $z = 0$) que o $\log(z)$. Tais fatos serão úteis depois para descrever as superfícies de *Riemann* dessas funções.

1.2 SUPERFÍCIES DE RIEMANN COMO VARIEDADES COMPLEXAS

As superfícies de *Riemann* são casos particulares de variedades complexas. Estas, por sua vez, são definidas de forma semelhante às variedades reais. Enquanto no caso real elas são identificadas localmente com o espaço $\mathbb{R}^n$ e as funções de transição (funções de mudança de coordenadas) são suaves (de clase C^∞), no caso complexo, são localmente identificadas com $\mathbb{C}^n$ com funções de transição holomorfas. Vemos, portanto, que uma variedade complexa é um espaço topológico que, localmente, pode ser descrito por meio de um sistema de coordenadas complexas. Mais precisamente:

Definição 1.1. Diremos que um espaço topológico M é uma variedade complexa de dimensão n se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. M é Hausdorff com base topológica enumerável;
2. Existe uma família $\{(U_{i,} \varphi_i)\}_{i \in I}$, onde I é um conjunto de índices, sendo para cada $i \in I$, U_i um conjunto aberto de M e φ_i um homeomorfismo de U_i sobre um aberto V_i de $\mathbb{C}^n$ com $\{U_i\}_{i \in I}$ cobrindo M, isto é, $\cup_{i \in I} U_i = M$.
3. Para todo $i, j \in I$, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação

$$\psi = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_j(U_i \bigcap U_j)$$

é holomorfa no sentido de várias variáveis complexas.

Obs 1.1. Para aspectos mais gerais sobre variedades complexas consultar ([6]) ou ([7]).

Os homeomorfismos φ_i são chamados de cartas ou coordenadas locais e a coleção $A := \{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ é chamada de atlas, onde este atlas deve ser maximal, *i.e*, ele não está contido em nenhum atlas estritamente maior. Isto quer dizer que qualquer carta que é compatível com toda carta em A já está em A.

Podemos observar que toda variedade analítica complexa possui uma estrutura subjacente de variedade diferenciável C^∞ (e mesmo analítica real) pois podemos identificar $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$. Dessa maneira, M possui dimensão real par.

A seguir daremos um exemplo de variedade complexa.

Exemplo 1.5. Da mesma maneira que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (espaço projetivo real de dimensão n) tem uma estrutura natural de variedade diferenciável, $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (espaço projetivo complexo de dimensão complexa n,isto é, o espaço das retas complexas passando pela origem de um espaço vetorial complexo de dimensão n+1) tem estrutura natural de variedade complexa. As cartas locais são da forma

$$(z_0, ..., z_n) \to (\frac{z_0}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j}) \quad , \quad z_j \neq 0. \tag{1.8}$$

Obs 1.2. Para mais exemplos de variedades complexas importantes consultar ([12]).

Definimos agora superfície de *Riemann* e alguns conceitos importantes além de tratarmos de exemplos concretos.

Definição 1.2. Uma superfície de *Riemann* é uma variedade complexa conexa de dimensão um (e, portanto, dimensão real dois).

Definição 1.3. Sejam M e N duas superfícies de *Riemann* com atlas $\{(U_\alpha, \tilde{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}$ e $\{(V_i, \tilde{V}_i, \phi_i)\}$, respectivamente. Uma função contínua $f : M \to N$ é dita ser holomorfa se para cada α e i, a composição

$$\phi_i \circ f \circ \psi_\alpha^{-1} \tag{1.9}$$

é holomorfa no seu domínio de definição.

Neste caso $\phi_i \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ é uma função de $\psi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_i))$ em $\tilde{V}_i$. Estes conjuntos são abertos em $\mathbb{C}$, e então a condição de ser holomorfa recai no caso usual de uma variável complexa. É um exercício simples verificar que tal conceito independe da escolha do atlas.

Definição 1.4. Um **biholomorfismo** entre duas superfícies de *Riemann* M e N é uma aplicação holomorfa $f : M \to N$ que é inversível e cuja inversa é também holomorfa. Neste caso dizemos que M e N são equivalentes ou biholomórficas. No caso $M = N$, um biholomorfismo é também chamado de automorfismo.

Dessa forma podemos ver um biholomorfismo como uma espécie de difeomorfismo no sentido complexo.

Exemplo 1.6. O plano complexo $\mathbb{C}$, e qualquer subconjunto aberto U de $\mathbb{C}$, é claramente uma superfície de *Riemann*. Neste caso, funções holomorfas de abertos de $\mathbb{C}$em $\mathbb{C}$, como superfícies de *Riemann*, recai no conceito de holomorfia da análise complexa.

Exemplo 1.7. O disco unitário de centro na origem $\mathbf{D}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ e o semi-plano superior $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C}; Im(w) > 0\}$ são superfícies de *Riemann*, pois são abertos de $\mathbb{C}$. Eles são equivalentes devido à aplicação

$$z = \frac{w - i}{w + i} \tag{1.10}$$

que é um caso particular de transformação de Möbius (um tipo especial de transformação de variável complexa que será vista mais adiante), chamada de transformada de *Cayley*.

Exemplo 1.8. O exemplo clássico de superfície de *Riemann* compacta é a chamada ***esfera de Riemann.*** A construção da esfera de *Riemann* é um fato bastante conhecido dentro da matemática. Por isso, em vez de fazer a construção desta vamos apenas destacar um fato importante: A esfera de *Riemann* é biholomorfa a esfera usual $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. De fato, a esfera de *Riemann* é definida como sendo $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Assim, vemos que a esfera de *Riemann* é a compactificação do plano complexo $\mathbb{C}$ por um ponto ideal no infinito, denotado por ∞. Um conjunto de cartas para a esfera de *Riemann* é

$$\{(\mathbb{C}, z), (\overline{\mathbb{C}}/\{0\}, 1/z)\}. \tag{1.11}$$

Portanto, a função de transição é $f(z) = 1/z$.

Para mostrar que S^2 é uma superfície de *Riemann* biholomorfa a $\bar{\mathbb{C}}$ basta mostrar que elas possuem as mesmas funções de transição já que, topológicamente são idênticas. Um conjunto de cartas para esfera S^2 é

$$\{(S^2/(0,0,1), \phi+), (S^2/(0,0,-1), \phi-)\} \tag{1.12}$$

onde $\phi\pm$ são as projeções estereográficas em coordenadas complexas nos pólos norte e sul, dados respecti- vamente por $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$ e $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -1)$ com

$$\phi_+(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + \boldsymbol{i}x_2}{1 - x_3} \quad e \quad \phi_-(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + \boldsymbol{i}x_2}{1 + x_3}. \tag{1.13}$$

Dado qualquer ponto $p = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ satisfazendo a condição $x_3 \neq \pm 1$, então $\phi_- \circ \phi_+^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, como na esfera de *Riemann*. Logo, qualquer uma das projeções estereográficas constituem um biholomor- fismo ao identificarmos o polo em questão com o infinito. Portanto $\bar{\mathbb{C}}$ e S^2 são equivalentes.

Apesar de $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e S^2 serem simples exemplos de superfícies de *Riemann*, elas desempenham um pa- pel importante dentro da teoria pois como veremos posteriormente estão diretamente relacionadas com o problema de classificação das superfícies de *Riemann*.

Os dois exemplos seguintes ilustram bem como é feita a construção heurística de superfícies de *Riemann* a partir de funções multivaloradas. A ideía foi criada por Bernhard *Riemann* por volta dos anos 1850 e é uma construção geométrica que permite que superfícies sejam domínios ou imagens para estas funções mul- tivaloradas. Ainda de maneira heurística podemos entender essa construção como o conceito de aplicação definida em uma superfície de *Riemann*, que pode ser vista como uma generalização do plano complexo $\mathbb{C}$ constitúıdo de mais de uma folha. A teoria criada por *Riemann* capitaliza o fato de que uma dada função multivalente associa um único valor a cada ponto de uma superfície dessas. Uma vez obtida uma superfície de *Riemann* para uma dada função, essa função está bem definida na superfície e podemos aplicar a teoria de funções univalentes. Dessa forma, resolvemos as dificuldades decorrentes da multivalência por meio de uma construção geométrica. No entanto, a descrição dessas superfícies e a interligação das diversas folhas podem ser bastante complicadas.

Exemplo 1.9. (Superfície de *Riemann* da raiz quadrada). Denotemos $|z| = r$. Sem nenhuma restrição sobre $z \neq 0$ e $\arg(z)$, $\sqrt{z}$ associa dois, e somente dois valores distintos para cada z. Uma superfície de *Riemann* para $\sqrt{z}$ é obtida substituindo o plano z com uma superfície constitúıda de duas folhas R_0 e R_1, cada uma cortada ao longo do eixo real positivo e com R_1 emendada à R_0 da seguinte forma: a aresta inferior do corte de R_0 é unida à aresta superior do corte de R_1 e a aresta inferior do corte de R_1 é unida à aresta superior do corte de R_0. Se um ponto z começa da aresta superior do corte de R_0 e descreve um caminho contínuo em torno da origem no sentido anti-horário, o angulo θ cresce de 0 até 2π. O ponto passa então da folha R_0 para folha R_1, na qual θ cresce de 2π até 4π. Se o ponto continuar dessa forma, ele retorna à folha R_0, em que o valor de θ pode variar de 4π até 6π ou de 0 até 2π, e assim por diante. Podemos notar que o valor de $\sqrt{z}$ em um ponto em que o camiho passa da folha R_0 para folha R_1 é diferente do valor de $\sqrt{z}$ em um ponto em que o caminho passa da folha R_1 para a folha R_0. Dessa forma, constrúımos uma superfície de *Riemann* na qual $\sqrt{z}$ é uma aplicação injetora dos valores de z não nulos. Nessa construção, as arestas das folhas R_0 e R_1 são unidas em pares de tal maneira que a superfície resultante é conexa e fechada. Os pontos em que duas arestas são unidas são diferentes dos pontos em que são unidas as duas outras arestas. Na visualização de uma superfície de *Riemann*, é importante entender como devemos proceder ao alcançar uma aresta do corte de uma folha.

A origem é um ponto especial dessa superfície, pois é um ponto comum a ambas as folhas, e uma curva áı em torno da origem deve dar duas voltas para poder ser fechada. Portanto, temos que a origem neste caso é um ponto de “ramificação”. A imagem da folha R_0 pela transformação $w = \sqrt{z}$ é a metade superior do plano w, pois o argumento de w em R_0 é $\theta/2$, sendo $0 \leq \theta/2 \leq \pi$. Analogamente, a imagem da folha R_1 é a metade inferior do plano w. Assim como no exemplo anterior, posteriormente veremos que em cada folha, a função que definimos é uma continuação analítica da função definida na outra folha, assim como foi feito para a função univalente $\sqrt{z}$ definido no ramo principal do $\log(z)$. Nesse sentido, a função univalente $\sqrt{z}$ dos pontos da superfície de *Riemann* é uma função holomorfa em todos os pontos, exceto na origem. De fato, como $\log(z)$ é o inverso da $\exp(z)$, que nunca se anula, então não é possível que $\log(z)$ seja holomorfo na origem (sequer pode ser contínuo, pois a função arg(z) não o é).

As ideías heurísticas feitas acima podem adquirir um aspecto mais rigoroso como se segue.

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ fixo. Dado $w = x + iy \in \mathbb{C}$, a solução da equação

$$w^2 = z \leftrightarrow (x+iy)^2 = (a+bi) \tag{1.14}$$

é dada por $z = x(a, b) + iy(a, b)$ onde

$$x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \quad e \quad y = \rho(b).\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}. \tag{1.15}$$

com $\rho(b) = 1$, se $b > 0$ e $\rho(b) = -1$, se $b < 0$, onde as ráızes quadradas acima

são consideradas positivas. Assim, precisamente vemos que para cada z a função $\sqrt{z}$ associa dois, e somente dois valores distintos e, portanto, é uma função bivalorada. Dessa, podemos entender a função $f(z) = \sqrt{z}$ como solução da equação $w^2 = z$. Porém, para se obter uma função univalorada de z de modo a ser contínua precisamos fazer um corte, i.e, definir um ramo em seu domínio. Uma maneira de fazer isso é definir $f : \mathbb{C}/\mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ por

$$z = re^{i\theta} \mapsto f(z) = \sqrt{z} := \sqrt{r}e^{i\theta/2} \quad , \quad \theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi) \tag{1.16}$$

a qual define a função raiz quadrada com parte real positiva.

Analogamente, $f : \mathbb{C}/\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ como em 1.16 onde $\theta = \arg(z) \in (0, 2\pi)$, define a função raiz quadrada com parte imaginária positiva. Para esta função assim definida não existe extensão contínua (e, portanto, holomorfa) para o semi-eixo removido. Quando z se aproxima de um ponto no semi-eixo por sentidos opostos, os limites dos valores assumidos por $\sqrt{z}$ diferem por um sinal. Portanto, começando em um ponto $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ dada qualquer escolha de $\sqrt{z_0}$ percorrido continuamente em torno da origem uma única vez irá passar para a escolha oposta de $\sqrt{z}$. Logo z_0 precisa percorrer continuamente duas vezes em torno da origem para que $\sqrt{z}$ percorra uma única vez. Assim, vemos que na prática é melhor usar o símbolo "$\sqrt{z}$" para raiz quadrada somente quando sabemos precisamente onde ela está definida. De acordo com o que foi estabelecido acima, podemos perceber que a origem 0 é um ponto "problema". A idéia neste caso é a de substituir o plano $\mathbb{C}$ (como domínio da função f bivalorada) pelo seu gráfico. Este conjunto (que na verdade será a superfície de *Riemann* de f) é o subconjunto fechado do plano dado por

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = z\}. \tag{1.17}$$

Assim, a função $w = f(z)$ é a projeção $M \to \mathbb{C}$ dada por

$$(z, w) \mapsto w = w(z) = f(z) \tag{1.18}$$

e define uma função biholomorfa entre o gráfico de w, M e o plano w. Dessa forma a superfície de *Riemann* da ráız quadrada é equivalente ao plano complexo $\mathbb{C}$.

Formalizamos essas idéias da seguinte maneira: Considerando $\mathbb{R}^-$ como sendo o conjunto dos números reais não positivos, definiremos os conjuntos

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(z, w) \in M; z \notin \mathbb{R}^-, Re(w) > 0\} \\ U_2 &:= \{(z, w) \in M; z \notin \mathbb{R}^-, Re(w) < 0\} \end{aligned} \tag{1.19}$$

e para

$$V := \{z = a + bi \in \mathbb{C}; \quad b = 0 \quad implica \quad a > 0\} \tag{1.20}$$

sejam os sistemas de coordenadas

$$\varphi_1 : U_1 \to V \quad e \quad \varphi_2 : U_2 \to V. \tag{1.21}$$

No sistema de coordenadas φ_1, f se escreve como

$$f \circ \varphi_1^{-1}(z) = f \circ \varphi_1^{-1}(re^{i\theta}) = \sqrt{r}e^{i\chi(\theta)} \tag{1.22}$$

onde

$$\chi(\theta) = \begin{cases} \theta/2, \; se \; 0 \leq \theta < \pi. \\ \theta/2 + \pi, \; se \; \pi < \theta \leq 2\pi. \end{cases} \tag{1.23}$$

Em particular, se $Im(z) > 0$ então $f \circ \varphi_1^{-1}(z)$ "=" $\sqrt{z}$. Além disso, vão existir sistemas de coordenadas ψ e φ tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^2. \tag{1.24}$$

Assim, temos um teorema:

Teorema 1.1. Existe uma única função $f : M \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f \circ \varphi_1^{-1}(r) = \sqrt{r}$, para $r > 0$. Além disso, f é uma função bijetora. Ainda, M é biholomorfa ao plano por meio da aplicação $\Phi : \mathbb{C} \to M$ dada por

$$z \mapsto \Phi(z) = (z, z^2). \tag{1.25}$$

Resumindo: O modelo apropriado de definição para $f(z) = \sqrt{z}$ é feito introduzindo outra cópia do plano complexo C e, dessa forma $f(z)$ e z se relacionam por meio da aplicação $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $\zeta \to \zeta^2$. Dado $U \subset \mathbb{C}/\{0\}$ aberto, simplesmente conexo, a função inversa é dada por $\zeta = z^{1/2}$ e é holomorfa em todos os pontos $z \in U$.

Como veremos no capítulo 2, o teorema da uniformizaçao de *Riemann* nos garante que a superfície de *Riemann* da ráiz é um exemplo do que chamaremos de superfície parabólica.

Exemplo 1.10. (Superfície de *Riemann* do logaritmo). Se não colocarmos restrição nenhuma em z e em $\arg(z)$ a função $\log(z)$ é multivalente, pois cada z associa um número infinito de valores todos adicionais de $2\pi i$, pois $\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2\pi$, onde $\text{Arg}(z)$ é o argumento principal de z. Para descrever log(z) como uma função univalente, substitúımos o plano z com a origem omitida por uma superfície em que um novo ponto é identificado a cada acréscimo ou decréscimo de 2π ou um múltiplo inteiro de 2π no argumento do número z.

Tratamos o plano z com a origem omitida como uma folha fina R_0 que é cortada ao longo da metade positiva do eixo real. Nessa folha, deixamos θ variar de 0 até 2π. Depois, cortamos uma segunda folha R_1 da mesma maneira e a emendamos com a folha R_0 da seguinte forma: unimos a aresta inferior do corte de R_0 com a aresta superior do corte de R_1. Em R_1, o angulo θ varia de 2π até 4π, de modo que se z for representado por um ponto de R_1, a função componente imaginário de log(z) varia de 2π até 4π. Em seguida, cortamos uma folha R_2 da mesma maneira e a emendamos com a folha R_1 assim: a aresta inferior do corte de R_1 é unida à aresta superior do corte dessa nova folha e assim sucessivamente com as folhas R_3, R_4, Uma folha R_{-1} na qual θ varia de 0 até -2π é cortada e unida com

a folha R_0 de maneira semelhante a que foi feito acima. Portanto, as folhas R_{-2}, R_{-3}, são construıdas de maneira análoga. As coordenadas r e θ de um ponto em qualquer uma das folhas podem ser consideradas as coordenadas polares da projeção do ponto sobre o plano z original, sendo a coordenada angular θ restrita a uma variação definida de 2π radianos em cada folha.

Considere um caminho contínuo qualquer nessa superfície conexa de um número infinito de folhas. À medida que um ponto z percorre esse caminho, os valores de $\log(z)$ variam continuamente pois θ, junto a r, varia continuamente, e agora $\log(z)$ tem um único valor em cada ponto do caminho.

A superfície descrita aqui é uma superfície de *Riemann* de $\log(z)$. Essa superfície conexa tem um número infinito de folhas, arranjadas de tal modo que $\log(z)$ é uma função univalente nesta superfície. A transformação $w = \log(z)$ é uma aplicação injetora da superfície de *Riemann* sobre todo o plano w. A imagem da folha R_0 é a faixa $0 \leq v \leq 2\pi$. Posteriormente poderemos observar que $\log(z)$, definida na folha R_1, representa a continuação analítica da função univalente $\log(z)$ com $0 < \theta < 2\pi$, para cima através do eixo real positivo. Nesse sentido, $\log(z)$ não é só uma função univalente em todos os pontos z da superfície de *Riemann*, mas é também uma função holomorfa em todos os pontos z da superfície.

As folhas poderiam, evidentemente, ser cortadas ao longo do eixo real negativo, ou, então, em qualquer raio a partir da origem, sendo unidas ao longo dos cortes de maneira apropriada, formando outras superfícies de *Riemann* para $\log(z)$. Assim, como dito anteriormente, uma dada função geralmente admite mais de uma superfície de *Riemann*.

Da mesma maneira que formalizamos e demos rigor para a construção da superfície de *Riemann* da raiz quadrada no exemplo anterior, poderíamos fazer também com a função logaritmo. Porém, como muitos dos aspectos usados no caso anterior se mantém intactos não o faremos aqui.

Exemplo 1.11. Dado $b \in \mathbb{C}/\{0\}$, o cilindro formado pela relação de equivalência em $\mathbb{C}$ definida por

$$z \sim w \Leftrightarrow z - w = nb$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$, com a estrutura complexa herdada de $\mathbb{C}$ mediante a projeção canônica $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, é biholomorfo ao plano sem a origem $\mathbb{C}/\{0\}$. Para mostrar isso, tomemos $b = 1$ sem perda de generalidade e consideremos a aplicação $\exp : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}/\{0\}$ dada por

$$[z] \mapsto e^{2\pi i z} \tag{1.26}$$

e mostremos que ela está bem definida, isto é, não depende do representante da classe $[z]$. De fato, um elemento na classe de $[z]$ tem a forma $z + \mathbb{Z}$. Logo, $e^{2\pi i(z+n)} = e^{2\pi i n} e^{2\pi i z} = e^{2\pi i z}$ já que $e^{2\pi i n} = \cos(2\pi n) + i \operatorname{sen}(2\pi n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ainda, f é bijetora. De fato, é injetora pois dados $z_1 + n$ e $z_2 + n$ em $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ então $e^{2\pi i(z_1+n)} = e^{2\pi i(z_2+n)}$ se, e só se, $2\pi(z_1 - z_2) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $z_1 - z_2 = n$ e, portanto, $z_1 = z_2 + n = z_2 \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. É sobrejetora pois, em primeiro lugar $|e^{2\pi i z}| = e^{Re(2\pi i z)} \neq 0$ e, portanto, $e^{2\pi i z} \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Além disso, dado qualquer $w \in \mathbb{C}/\{0\}$ então $e^{2\pi i z} = w$ se, e só se, $z = \frac{\theta}{2\pi} + i \log |w| \frac{-1}{2\pi}$, $\theta = \arg(w)$. Ainda, sua

derivada também não depende da escolha do representante da classe [z] e é dada por $(e^{2\pi iz})' = 2\pi ie^{2\pi iz}$ que é não nula para todo z ϵ $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Logo, pelo teorema da função inversa tal função é biholomorfa.

Assim como no caso da raiz, também veremos no capítulo 2, que pelo teorema da uniformizaçao de *Riemann*, a superfície do log é também parabólica.

1.3 PONTOS DE RAMIFICAÇÃO

Nesta seção descreveremos fatos importantes sobre pontos de ramificação para funções holomorfas entre superfícies de *Riemann*. Este conceito aparece no ambiente da Análise Complexa para uma função mul- tivalorada, quando superfícies de *Riemann* são constrúıdas com "ramos" ou "folhas" onde esta função multivalente se torna univalente. Como exemplos, vimos que a superfície de *Riemann* de log(z) possui infinitas folhas, pois o prolongamento analítico desta função consiste em adicionar $2\pi i$ a cada folha. Já a função $\sqrt{z}$ possui apenas duas folhas, cada uma correspondendo a um dos diferentes valores que sa- tisfazem $w^2 = z$, $z \neq 0$. Sem nenhuma restrição sobre z e arg(z) as funções $z^{1/3}$, $z^{1/4}$, . . ., $z^{1/n}$ são trivalentes, quadrivalentes,. . .,n-valentes e para cada uma delas suas respectivas superfícies de *Riemann* são constitúıdas com 3, 4, . . . n folhas, respectivamente.

Definição 1.5. Consideremos uma função $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa no domínio[1] $U \subset \mathbb{C}$. A **multiplicidade** de f em um ponto z_0 ϵ U é dada por

$$Kz_0(f) := \min\{n \geq 1;\ f^{(n)}(z_0) \neq 0\}, \tag{1.27}$$

exceto quando f é uma função constante, que neste caso $Kz_0(f) = 0$.

Proposição 1.1. Seja $f : M \to N$ uma função holomorfa entre duas superfícies de *Riemann* e considere (U, ϕ) e (V, ψ) cartas em vizinhanças de p ϵ M e $f(p)$ ϵ N. A **multiplicidade** de f em p definida por

$$Kp(f) := K_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \tag{1.28}$$

independe da escolha do sistema de coordenadas, e portanto é um número que depende apenas de f e p.

Demonstração: Tome $\tilde{g} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ e novas coordenadas $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\phi}$. A representação de f no novo sistema de coordenadas é

$$\tilde{g} = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ g \circ (\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}). \tag{1.29}$$

Basta então verificarmos que $\tilde{g} \circ \Phi = \Psi \circ g$ tem a mesma multiplicidade k em z_0 para quaisquer biholo- morfismos Φ e Ψ. Mas isso é consequência do fato de que para $n \leq k$ valem as fórmulas

$$(\tilde{g} \circ \Phi)^{(n)}(z_0) = \tilde{g}^{(n)}(\phi(z_0)(\Phi'(z_0))^n \quad e \quad (\Psi \circ g)^{(n)}(z_0) = \Psi'(g(z_0))g^{(n)}(z_0). \tag{1.30}$$

Como $\Phi'(z_0)$ e $\Psi'(g(z_0))$ são não nulos, o resultado fica provado.

---

1 Lembramos que por domínio entendemos um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$.

A proposição a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que uma função holomorfa f entre superfícies de *Riemann* tenha multiplicidade k em um ponto.

Proposição 1.2. Uma função holomorfa entre superfícies de *Riemann* $f : M \to N$ tem multiplicidade $K = K_p(f)$ em $p \in M$ se, e só se, existem cartas ϕ e ψ em vizinhanças de p e $f(p)$ tais que

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = z^k \quad , \quad \phi(p) = 0. \tag{1.31}$$

Demonstração: [1]

O nome ponto de "ramificação" (branch point) apareceu anteriormente e, agora, vamos defini-lo pre- cisamente.

Definição 1.6. Um ponto de ramificação para uma função entre superfícies de *Riemann* $f : M \to N$ é um ponto $p \in M$ tal que $K_p(f) > 1$, isto é, cuja multiplicidade é maior que 1.

A propriedade descrita na proposição 1.2 faz com que o conjunto dos pontos de ramificação p de uma função $f : M \to N$ seja discreto. Em particular se f é uma função própria, isto é, $f^{-1}(K)$ é compacto para qualquer K compacto então

$$d_f(q) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} K_p(f) \tag{1.32}$$

está bem definida. Assim:

Definição 1.7. Se $f : M \to N$ é uma função própria, então $d_f(q)$ não depende de $q \in f(M)$. Portanto o **índice** de f está bem definido como

$$d_f := \sum_{p \in f^{-1}(q)} K_p(f), \tag{1.33}$$

para qualquer $q \in f(M)$.

Demonstração: Considere a função $f : C \to C$ dada por

$$z \mapsto f(z) = z^n \quad , \quad n \geq 1. \tag{1.34}$$

Podemos observar que para esta f a condição descrita acima é verdadeira. O caso geral para uma função $f : M \to N$ pode ser reduzido para o caso particular anterior usando a proposição 1.2 da seguinte forma: Considere um ponto $q \in N$ qualquer porém fixado. Em torno de cada ponto $p \in f^{-1}(q)$ podemos encontrar abertos U_p em M e V_p em torno de q em N de modo que nesse novo sistema de coordenadas f localmente se escreve como $z \to z^{k_p}$. Defina $V = \cap V_p$. Dessa forma, V é uma vizinhança do ponto $q \in N$ já que o conjunto $f^{-1}(q)$ é finito, isto é, existe apenas um número finito de pontos $p \in f^{-1}(q)$. Usando o fato de que f é uma aplicação própria podemos assumir sem perda de generalidade que $f^{-1}(V) \subset \cup U_p$. Consideremos outro ponto qualquer $q' \in V$. Da mesma maneira que fizemos a construção acima para o conjunto $f^{-1}(q)$ podemos fazer também para o conjunto $f^{-1}(q')$. Do caso especial descrito inicialmente segue que $d_f(q') = d_f(q)$. Logo, $d_f(q)$ é localmente constante

em N. Como N é conexa então segue que $d_f\ (q)$ é constante.

Queremos estabelecer o conceito de função meromorfa em superfícies de *Riemann* de modo a fazer uma analogia e manter certas propriedades em relação ao cálculo de uma variável complexa. Isto é obtido se lembrarmos que tais funções "tendem ao infinito" quando estamos arbitrariamente próximos de um polo, diferentemente de uma singularidade essencial (veja teorema de Casorati-Weierstrass, [13]).

Definição 1.8. Uma função **meromorfa** em M é uma função holomorfa $f : M \to S^2$ que não é identicamente constante igual a ∞. Se $f\ (p) = \infty$, então p dito ser um **polo** de f em **M**. Sua ordem é o número inteiro $k_f(p)$.

Além disso, uma função meromorfa e própria possui um número finito de polos de acordo com um fato já visto anteriormente: Como f é própria, então $f^{-1}(\infty)$ é compacto e discreto pela proposição 1.2, e portanto finito. Assim temos um teorema importante:

Teorema 1.2. Se M é compacto e existe uma função meromorfa em M com um único polo e este é de ordem 1, então M é equivalente à esfera de *Riemann*.

Demonstração: Suponha M uma superfície de *Riemann* compacta e admita que $f : M \to S^2$ seja uma função não constante meromorfa com um único pólo de ordem 1. Vamos mostrar que f é um biholomorfismo. Como M é compacto e f meromorfa (portanto contínua) então ela é uma aplicação própria. Logo $f\ (M\ ) = S^2$, isto é, f é sobrejetora. Pela definição 1.7, como o cálculo do índice independe da escolha de $q \in f\ (M\ ) = S^2$, tomando o ponto $q = \infty \in S^2$ concluímos que $d_f\ (\infty) = 1$, ou seja, o índice de f é $d_f = 1$. Como por hipótese f possui um único pólo, isto é, existe um único ponto em $f^{-1}(\infty)$, digamos x $\in f$ $-1(\infty)$ (e, em particular sua ordem é $K_x = 1$) então f é injetora. Logo f é bijetora e, portanto, inversível. A função inversa f^{-1} é contínua pois a imagem $f\ (A) \subset S^2$ para um fechado A é compacto e, portanto, fechado. Dessa forma f é um homeomorfismo e $f\ (z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in M$. Pelo teorema da função inversa f^{-1} também é holomorfa. Portanto f é um biholomorfismo.

CAPÍTULO 2

O TEOREMA DA UNIFORMIZAÇÃO DE *RIEMANN*

Neste capítulo estudaremos o Teorema da Uniformização de *Riemann* e os conceitos necessários para entende-lo. O Teorema aparece inicialmente na teoria das funções de uma única variável complexa. Ele diz que sempre existe um biholomorfismo entre um subconjunto próprio do plano complexo e o disco unitário centrado na origem. Este teorema também aparece no contexto das superfícies de *Riemann* e possibilita classifica-las dentro de um certo sentido. Nesse caso, o teorema diz que toda superfície de *Riemann* simplesmente conexa é biholomorfa a um e somente um dos três tipos de superfície de *Riemann*: O plano complexo, o disco unitário ou a esfera de *Riemann*. Uma consequência importante desse teorema é que uma superfície de *Riemann* sempre admite uma métrica *Riemann*iana com curvatura constante. O caso geral as divide em cinco classes diferentes e também tem conexões com questões de curvatura constante.

2.1 GRUPOS MATRICIAIS, AÇÕES DE GRUPOS E RETICULADOS

Para entender o enunciado do Teorema da Uniformização de *Riemann* precisaremos de alguns conceitos importantes, como as definições dos grupos matriciais *SL*(2, ℝ), *PSL*(2, ℝ) e os conceitos de ação e ação livre de grupos bem como a noção de reticulado em ℂ. Faremos isso a seguir.

Definição 2.1. *SL*(2, ℝ) é o conjunto das matrizes quadradas de ordem dois, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ onde *a, b, c, d* ∈ ℝ e com determinante unitário, ou seja, *det*(A) = *ad* − *bc* = 1.

Por exemplo, a matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pertence a *SL*(2, ℝ) pois suas entradas são reais e seu determinante é unitário. *SL*(2, ℝ) tem estrutura de grupo referente à multiplicação de matrizes. Ele recebe o nome de Grupo Linear Especial.

Definição 2.2. Chamamos de Grupo Projetivo Linear Especial o conjunto *PSL*(2, ℝ) = *SL*(2, ℝ)/{+*I*, −*I*}, onde *I* é a matriz identidade quadrada de ordem dois, isto é, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, neste grupo matrizes opostas são identificadas, ou seja, dado *A* ∈ *SL*(2, ℝ) então *A* e −*A* são a mesmas do ponto de vista de *PSL*(2, ℝ).

Definição 2.3. Seja G um grupo e M um conjunto. Uma ação (à esquerda) de G em M é uma função

$$G \times M \to M$$
$$(g,p) \mapsto g \cdot p \tag{2.1}$$

satisfazendo as condições:

1. (Identidade). Dado e o elemento neutro do grupo G então $e \cdot p = p$, $\forall p \in M$.
2. (Compatibilidade). Dados $g, h \in G$ e $p \in M$, onde gh denota o resultado da operação de grupo em G de g com h, então $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$.

Analogamente poderíamos definir uma ação de grupos à direita.

Definição 2.4. Dizemos que uma ação de grupos $G \times M \to M$ é **livre** se para qualquer $p \to M$, $g \cdot p = p$ implica $g = e$, onde e é a identidade em G. Se M é espaço topológico, a ação é dita **propriamente descontínua** se para qualquer $p \in M$ existe uma vizinhança Up tal que

$$g \neq e \quad \Rightarrow \quad U_p \cap (g \cdot U_p) = \emptyset\,. \tag{2.2}$$

Isto significa dizer que em uma ação livre de grupos somente a identidade fixa qualquer p. Dizer que ela é propriamente descontínua é uma forma de garantir que o espaço quociente M/G seja Hausdorff, sendo que este é definido pela relação de equivalência

$$p \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, g \in G : \quad p = g \cdot q\,, \tag{2.3}$$

com a topologia quociente, i.e., a topologia mais fina que torna a projeção $M \to M/G$ um mapeamento contínuo e aberto.

Exemplo 2.1. Um exemplo elementar de ação livre de grupos é a ação de um grupo G nele mesmo por multiplicação à esquerda $L : G \times G \to G$. Se o grupo possuir elementos além da identidade e então não existe elemento $h \neq e$ em G que satisfaça $gh = h$, para todo $g \neq e$ em G.

Exemplo 2.2. Um exemplo menos elementar que o anterior de ação livre de grupos é a ação de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ dada por

$$e^{i\theta}.(z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2) \tag{2.4}$$

que dá origem ao mapa de Hopf, porém, não entraremos nos detalhes aqui.

Definição 2.5. Considere o grupo dos números complexos $\mathbb{C}$ onde a operação é a adição. Dizemos que Λ é um **reticulado** em $\mathbb{C}$ se for um subgrupo aditivo discreto gerado por dois elementos linearmente indepen- dentes sobre o corpo dos reais. Explicitamente, escrevemos:

$$\Lambda = \{na_1 + ma_2\,;\, n, m \in \mathbb{Z}\}, onde \{a_1, a_2\} \subset \mathbb{C} \quad \text{é L.I. sobre} \quad \mathbb{R}\}. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.3. O conjunto dos inteiros Gaussianos $\mathbb{Z}[i] = \{z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ visto como subconjunto de $\mathbb{C}$ é um reticulado.

2.2 AUTOMORFISMOS DO PLANO, DO DISCO E DA ESFERA

O conjunto dos automorfismos de uma superfície de *Riemann* é denotado por $Aut(M)$. Este conjunto munido com a operação de composição é um grupo. Se $f : M \to N$ é um biholomorfismo, então a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_f : Aut(M) &\to Aut(N) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

é um isomorfismo com inversa dada por

$$\Phi_f^{-1}(\varphi) = f^{-1} \circ \varphi \circ f. \tag{2.7}$$

Dessa forma, duas superfícies de *Riemann* tem o mesmo grupo de automorfismos a menos de um iso- morfismo.

Agora descreveremos o grupo de automorfismos do plano complexo, do disco e da esfera de *Riemann*. Para isso precisamos definir uma das classes mais importantes de funções elementares da Análise Complexa: As transformações de Möbius.

Definição 2.6. Dados números complexos a, b, c, d com $ad - bc \neq 0$, dizemos que uma transformação de Möbius é uma função racional da esfera de *Riemann*

$$T : \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$$

dada por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, \ se \ z \neq -d/c. \\ a/c, \ se \ z = \infty. \\ \infty, \ se \ z = -d/c. \end{cases} \tag{2.8}$$

A condição $ad - bc \neq 0$ é para que T não seja identicamente constante (em particular igual a a/c).

Algumas propriedades que tornam essa clase funções importante são:

1. Dada uma transformação de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ podemos escreve-la como

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{(ad - bc)}{c}\frac{1}{cz + d}. \tag{2.9}$$

Logo, $f_1 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ onde f_1 e f_4 são as translações $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ e $f_4(z) = \frac{a}{c} + z$, f_3 é a homotetia $f_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2} z$ e f_2 é a inversão $f_2(z) = \frac{1}{z}$, para $c \neq 0$. É claro que em um caso particular algumas dessas podem se omitir.

2. Se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é transformação de Möbius então

$$T^{-1}(z) = \frac{b - dz}{cz - a} \quad (2.10)$$

também é pois $-(ad - bc) \neq 0$. Além disso, se $T1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ e $T2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ são duas transformações de Möbius então

$$T_1 \circ T_2(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} \quad (2.11)$$

também é pois

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0. \quad (2.12)$$

3. Uma transformação de Möbius transforma retas e círculos em retas e círculos, no sentido de que um círculo pode ser transformado em uma reta e vice-versa onde um círculo na esfera $\bar{\mathbb{C}}$ passando pelo ponto ∞ corresponde a uma reta no plano $\mathbb{C}$.

Para maiores detalhes do item 3 ver [14], Capítulo 3, Seção 3.

A seguir descreveremos os automorfismos do plano, do disco e da *esfera de Riemann*. Faremos demonstrações simplificadas para os teoremas que descrevem tais automorfismos. Para um tratamento mais completo consultar [13], Capítulo 7 ou [2], Capítulo 5.

Precisaremos de três resultados clássicos da análise complexa: O *lema de Schwarz*, o teorema de *Casorati-Weierstrass* e o terema de caracterização das funções meromorfas na esfera de *Riemann*.

Teorema 2.1. (*Lema de Schwarz*). Seja $D(0, 1)$ o disco unitário e considere uma função $f : D(0, 1) \to D(0, 1)$ holomorfa satisfazendo $f(0) = 0$. Então:

1. $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D,$

2. Se para algum $z_0 \neq 0$ ocorrer $|f(z_0)| = |z_0|$, então existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ tal que $f(z) = \alpha z$.

Demonstração: Ver [13] página 210 ou [2] página 70.

Teorema 2.2. (*Casorati-Weierstrass*). Suponha que a origem 0 seja uma singularidade essencial de uma função f e seja $D(0, r)$ um disco centrado na origem de raio r pequeno o suficiente de modo que $f|_{D(0,r)/\{0\}}$ seja holomorfa. Consideremos $U := D(0, r)/\{0\}$, isto é, o complemento de 0 em U. Então $\overline{f(U)} = \mathbb{C}$ (ou seja, a imagem $f(U)$ é densa no conjunto

dos números complexos). Em outras palavras, os valores assumidos por f para quando z percorre U se tornam arbitráriamente próximos de qualquer número complexo.

Equivalentemente o teorema de *Casorati-Weierstrass* afirma que se 0 é singularidade essencial de f então para todo $\omega \in \mathbb{C}$ existe uma sequência de pontos $\{z\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ tal que $f(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} \omega$.

Demonstração: Ver [13] página 168 ou [2] página 11.

Teorema 2.3. (Caracterização das funções na *esfera de Riemann*). Considere uma função da esfera de *Riemann* $f : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$. Então:

1. f é meromorfa se, e só se, for uma função racional isto é, o quociente de dois polinômios.
2. f é holomorfa se, e só se, for constante.
3. Se f tem um polo no infinito, então f é necessariamente um polinômio.

Demonstração: Para maiores detalhes ver [13] página 171.

Teorema 2.4. Uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está em $Aut(\mathbb{C})$ se, e só se, $f(z) = \alpha z + b$ para constantes $\alpha, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Em outras palavras, são as tranformações de Möbius com $c = 0$ e $d = 1$.

Demonstração: É um exercício direto verificar que as funções do tipo $f(z) = \alpha z + b$, $\alpha \neq 0$ formam um grupo com a operação de composição de funções que, em particular, é um subgrupo do grupo das transformações de Möbius. Vamos considerar que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa (em particular inteira) e injetiva (não necessariamente sobrejetiva). Definimos $F(z) := f(1/z)$ para $z \in D(0, 1)/\{0\}$. Como f é holomorfa e, portanto, uma função aberta o conjunto $f(D(0, 1))$ é um aberto de $\mathbb{C}$. Consideremos um ponto qualquer $\omega \in f(D(0, 1))$. Sendo f injetora então F nunca pode assumir o valor ω. Pelo teorema de *Casorati-Weierstrass*, F tem a origem 0 como uma singularidade removível ou um polo (isto é, não pode ser singularidade essencial). Podemos verificar que f é uma função meromorfa na esfera de *Riemann* e, portanto, uma função racional pelo Teorema (2.3). Como F tem 0 como singularidade removível ou polo então, podemos verificar que $f(z) = az + b$ para constantes $\alpha, b \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.

Teorema 2.5. Seja $\boldsymbol{D}(0, 1)$ o disco unitário centrado na origem. Os elementos de $Aut(\boldsymbol{D}(0, 1))$ são precisamente as transformações de Möbius

$$f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1. \tag{2.13}$$

Demonstração: É um exercício verificar que as funções descritas por 2.13 formam um grupo digamos, G com a operação de composição de funções que, em particular, é um

subgrupo do grupo das transformações de Möbius. Sendo

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \tag{2.14}$$

a derivada de uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $b = \bar{C}$ e $d = \bar{\alpha}$, então um cálculo nos mostra que

$$1 - |f(z)|^2 = \frac{(cz+\overline{a})(\overline{cz}+a) - (az+\overline{c})(\overline{az}+c)}{|cz+\overline{a}|^2} = (1-|z|^2)|f'(z)|. \tag{2.15}$$

A equação acima mostra que $|f(z)| < 1$ se, e só se, $|z| < 1$. Logo, $G \subset AutD(0, 1)$ (mais do que isso, é subgrupo). Consideremos agora $g \in AutD(0, 1)$. Dessa forma, $|g(0)| < 1$. Podemos encontrar α, $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\alpha|^2 - |c|^2$ de tal modo que $g(0) = \frac{-\overline{c}}{a}$. Vamos tomar f como na equação 2.13. Então, $h := fg \in Aut(D(0, 1))$ com $h(0) = 0$. Pelo *Lema de Schwarz*, (2.1), $|h(z)| \leq |z|$. Além disso, $h^{-1}(0) = 0$ e novamente pelo *lema de Schwarz* encontramos que $|z| \leq |h(z)|$. Logo, pela segunda parte do *Lema de Schwarz*, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $h(z) = e^{i\theta}z$, o que prova o teorema.

Existe uma maneira equivalente de caracterizar os elementos de *Aut(D(0,1))*:

Teorema 2.6. Seja $f : \mathbf{D}(0,1) \to \mathbf{D}(0, 1)$ um automorfismo do disco unitário e suponha que $f(\alpha) = 0$ para algum $\alpha \in \mathbf{D}(0, 1)$. Então existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = e^{i\varphi}\frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}. \tag{2.16}$$

Demonstração: Segue diretamente do teorema 2.5.

Corolário 2.1. Se f é um automorfismo do disco que fixa a origem, isto é, $f(0) = 0$, então $f(z) = e^{i\varphi}z$ para algum número real φ, e portanto f é uma rotação.

Foi visto no exemplo 1.7, o semi-plano superior e o disco unitário são equivalentes por meio da transformação de *Cayley* $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. De acordo com o que foi estabelecido no início dessa seção a existência de um biholomorfismo $f : \mathbb{H} \to \mathbf{D}(0, 1)$ em certo sentido (a menos de um biholomorfismo) determina os automorfismos de $\mathbb{H}$. Assim, podemos dizer que $Aut(H) = f^{-1} \circ Aut(\mathbf{D}(0, 1)) \circ f$, significando que se $\phi \in \mathbb{H}$ então $\phi = f^{-1} \circ \varphi f$ para algum $\varphi \in Aut(\mathbf{D}(0, 1))$. Dessa maneira, podemos dar uma descrição explícita de $Aut(\mathbb{H})$.

Teorema 2.7. Considere

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma matriz 2×2 real com determinante 1, isto é, $ad - bc = 1$. Seja f_M uma aplicação tal que

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad z \in \mathbb{H}. \tag{2.17}$$

Então f_M é um automorfismo de $\mathbb{H}$, e todo automorfismo de $\mathbb{H}$ é da forma f_M para alguma matriz como M. Além disso, dois automorfismos de $\mathbb{H}$, digamos, $f_{M'}$ e f_M são iguais se, e só se, $M' = \pm M$.

Para maiores detalhes ver [13] página 217.

Teorema 2.8. $Aut(\bar{\mathbb{C}}) = Aut(S^2)$ é precisamente o grupo das transformações de Mobius.

Demonstração: De acordo com o teorema 2.3 as funções meromorfas da esfera de *Riemann* são as racionais, isto é, quociente de dois polinômios, digamos $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$. Sem perda de generalidade, suponha que o grau de $p(z) \geq 2$. Dessa forma, f não pode ser injetora. Logo, $p(z) = az + b$. Analogamente, $q(z) = cz + d$. Portanto, necessariamente $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, onde $ad - bc \neq 0$, pois caso contrário f seria constante. Isto se observa na fómula (2.9) se $c \neq 0$, e o Teorema 2.3 se $c = 0$.

2.3. HOMOTOPIA E ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

A seguir, iremos falar um pouco sobre homotopia e recobrimento universal. Aqui não desenvolveremos sua teoria geral, mas sim o que é necessário dentro do nosso contexto de Superfícies de *Riemann*. Daremos também exemplos clássicos.

2.3.1 Grupos de Homotopia

Denotemos por $\Omega(M, p_0, p_1)$ o conjunto de todos os caminhos contínuos de p_0 até p_1, ambos pontos do espaço topológico[1] M. Com isto queremos dizer que seus elementos são aplicações contínuas do intervalo $I = [0, 1]$ em M.

Dizemos que dois caminhos $\varphi_0, \varphi_1 \in \Omega(M, p_0, p_1)$ são **homotópicos** se existe uma função contínua $F : I \times I \rightarrow M$ tal que

$$F(t, 0) = \varphi_0(t) \quad e \quad F(t, 1) = \varphi_1(t), \forall t \in I. \tag{2.18}$$

1. Para nossos objetivos futuros, o leitor pode tomar M como uma superfície de *Riemann*.

A função F é chamada de homotopia de φ_0 em φ_1. Além disso, se φ_0 é um caminho fechado, *i.e., p0 = p1*, dizemos que ele é homotópico a zero se é homotópico ao caminho constante. homotópico é uma relação de quivalência em $\Omega(M, p_0, p_1)$.

Considere os caminhos $\varphi_1 \in \Omega(M, p_0, p_1)$ e $\varphi 2 \in \Omega(M, p_1, p_2)$. A operação **justaposição entre caminhos**, denotada por $\varphi_1 * \varphi_2$, é definida como a seguir:

$$\Omega(M, p_0, p_1) \times \Omega(M, p_1, p_2) \to \Omega(M, p0, p_2)$$

$$(\varphi_1, \varphi 2) \to \varphi_1 * \varphi_2$$

dado por

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t), \; se\; t \in [0, 1/2]. \\ \varphi_2(2t-1), \; se\; t \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dado p $\in$ M, um **laço** em p é um caminho fechado φ com $\varphi(0) = \varphi(1) = p$. O conjunto dos laços em p será denotado por $\Omega(M, p)$.

Teorema 2.9. O conjunto quociente das classes de equivalência de laços homotópicos em $\Omega(M, p)$ é um grupo com a operação de justaposição, chamado de grupo de homotopia de M com ponto base p, denotado por $\pi_1(M, p)$. Ainda, se existe um caminho entre p e q, então $\pi_1(M, p)$ é isomorfo a $\pi_1(M, q)$.

Demonstração: Primeiramente, a operação de transposição está bem definida em $\pi_1(M, p)$, pois se existem homotopias $F_0(t, s)$ e $F_1(t, s)$ como em (2.18) de φ_0 em $\tilde{\varphi}_0$ e φ_1 em $\tilde{\varphi}_1$, respectivamente, então a justaposição $F_0(\cdot, s) * F_1(\cdot, s)$ é uma deformação de $\varphi_0 * \varphi_1$ em $\tilde{\varphi}_0 * \varphi_1$. Em outras palavras, a justaposição não depende da escolha na classe de homotopia de uma curva. A classe de equivalência da curva constante e igual a p representa a identidade e a classe de $\varphi(1 - t)$ a inversa de $\varphi(t)$. Para maiores detalhes, veja [5].

Dado o teorema anterior, se M é uma variedade conexa, ou mais especificamente, uma superfície de *Riemann*, que por definição estamos tomando como conexa, e portanto conexa por caminhos, então todos seus grupos de homotopia em diferentes pontos são isomorfos. Seu **grupo fundamental** é, por definição, qualquer grupo isomorfo a um de seus grupos de homotopia, e será denotado por $\pi_1(M)$. No caso em que este é o grupo trivial, dizemos que M é **simplesmente conexa.**

Exemplo 2.4. Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são simplesmente conexos.

Exemplo 2.5. A esfera n-dimensional S^n é simplesmente conexo para $n \geq 2$. O grupo de homotopia do círculo é $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.6. Para o espaço projetivo $\mathbb{RP}^n$ temos:

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ se\ n = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \ se\ n > 1 \end{cases}$$

2.3.2 Recobrimento

Consideremos dois espaços topológicos M e N e uma função $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f é uma **aplicação de recobrimento** se:

(i) Para cada ponto $q \in N$ existe uma vizinhança V que contém p tal que $f^{-1}(V) = U_\alpha U_\alpha$ para abertos disjuntos $U\alpha \subset N$.

(ii)A restrição $f \mid U_\alpha$ é um homeomorfismo entre U_α e V.

Definição 2.7. Quando existir uma aplicação de recobrimento de um espaço topológico $\tilde{M}$ em M, diremos que $\tilde{M}$ é um **espaço de recobrimento** de M. Se $\tilde{M}$ for simplesmente conexo, diremos que ele é o **espaço de recobrimento universal** de M.

O próximo teorema nos dá condições sob um espaço topológico para que este possua um recobrimento universal. Sua existência é garantida no sentido de que este será construído. Não faremos a demonstração com todos os detalhes, mas sim daremos as idéias principais. Para maiores detalhes consultar [5] página 369.

Teorema 2.10. Todo espaço topológico conexo por caminhos tem um espaço de recobrimento universal, que é único a menos de um homeomorfismo.

Demonstração: Seja (M, p) um espaço topológico conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo com ponto base p. Consideremos o conjunto $\Omega(M, p)$ que é o conjunto constituído pelos caminhos contínuos $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ de modo que $\varphi(1) = p$ e considere $\tilde{M}$ como sendo o conjunto das classes de equivalência de laços homotópicos em $\Omega(M, p)$. Tome a classe $\tilde{p} = [p]$ e considere a aplicação $f : (\tilde{M}, \tilde{p}) \rightarrow (M, p)$ dada por $f([\varphi]) = \varphi(1)$. Vamos definir uma topologia no espaço $\tilde{M}$ de tal forma que a aplicação f se torne uma aplicação de recobrimento. Como M é um espaço localmente simplesmente conexo, existe uma base $\mathcal{B}$ da topologia em M de tal forma que seus abertos são conjuntos simplesmente conexos. Para cada ponto $p_0 \in M$, para cada vizinhança básica $U \in \mathcal{B}$ de p_0 e para cada $[\varphi] \in f^{-1}(p_0)$, vamos definir o conjunto

$$\tilde{U}[\phi] = \{[\psi] \in \tilde{M} \ ; \ \psi = \phi * \alpha, \ Img(\alpha) \subset U, \ \alpha(0) = p_0\}. \tag{2.20}$$

Os subconjuntos $\tilde{U}[\phi]$ serão chamados de vizinhanças básicas de $\tilde{M}$ e denotaremos por $\tilde{\mathcal{B}}$ como sendo a família de todas essas vizinhanças básicas. A demonstração agora se baseia em verificar quatro propriedades:

(p1) A família de vizinhanças básicas $\tilde{\mathcal{B}}$ forma uma base para uma topologia em $\tilde{M}$.

(p2) A aplicação $f : \tilde{M} \rightarrow M$ é uma função de recobrimento.

(p3) O espaço topológico $\tilde{M}$ é simplesmente conexo.

(p4) A aplicação $f : \tilde{M} \to M$ é uma função de recobrimento universal e, além disso, um espaço de recobrimento $\hat{f} : \hat{M} \to M$ é isomorfo ao recobrimento universal se, e só se, $\hat{M}$ for simplesmente conexo.

Para a propriedade (p_1) basta provar que a intersecção de duas vizinhanças básicas de $\tilde{M}$, digamos $\tilde{U}_{[\phi]}$ e $\tilde{V}_{[\phi']}$ é a união de vizinhanças básicas. Assim, consideremos a classe $[\psi] \in \tilde{U}[\phi] \cap \tilde{V}[\phi']$ e escrevemos $[\psi] = [\phi * \alpha]$ e $[\psi] = [\phi' * \alpha']$ onde $\alpha(0) = \phi(1)$ e $\alpha'(0) = \phi'(1)$, $Img(\alpha) \subset U$ e $Img(\alpha') \subset V$. Considere um conjunto $W \subsetneq (U \cap V)$ como sendo uma vizinhança simplesmente conexa do ponto $\psi(1)$. Então, segue que $\tilde{W}[\psi] \subsetneq \tilde{U}[\phi] \cap \tilde{V}[\phi']$. Como a classe $[\psi]$ foi considerado como um ponto qualquer em $\tilde{U}[\phi] \cap \tilde{V}[\phi']$ o resultado segue, isto é, esta intersecção é uma união de elementos de $\tilde{\mathcal{B}}$.

Com menos detalhes, a propriedade (p2) pode ser mostrada concluindo-se que, nesta ordem, a função f é contínua, bijetora, aberta e finalmente um homeomorfismo. Mas isso é consequência da propriedade *p(1)*, pois a topologia acima definida é exatamente para que a aplicação f tenha essas propriedades (e consequentemente uma aplicação de recobrimento). Além disso, deve-se mostrar também que $\tilde{U}[\phi] \cap U[\psi] \neq \emptyset \to \tilde{U}[\phi] = \tilde{U}[\psi]$ (isto é, uma analogia com o fato de que em um conjunto com uma relação de equivalência duas classes são iguais ou disjuntas). De fato, para uma classe arbitrária $[\phi * \gamma] \in \tilde{U}[\phi]$, vamos mostrar que $[\phi * \gamma] \in \tilde{U}[\psi]$. Por hipótese, existem caminhos α, β com $Img(\alpha), Img(\beta) \subset U$ satisfazendo as condições: $\alpha(0) = \phi(1), \beta(0) = \psi(1)$ e $[\phi * \alpha] = [\psi * \beta]$. A última igualdade implica que $\alpha(1) = \beta(1)$. Então, considerando um novo caminho $\gamma' = (\beta * \alpha^{-1}) * \gamma$ e usando a definição de conjunto quociente de classes de equivalência entre laços homotópicos (módulo com os pontos finais dos caminhos) concluímos que $[\phi * \gamma] = [\psi * \gamma'] \in \tilde{U}[\psi]$. A inclusão oposta é provada da mesma maneira.

Brevemente, a propriedade descrita em (*p3*) pode ser mostrada da seguinte forma: Dados $\phi \in \Omega(M, p)$ e $0 \leq t \leq 1$, definimos

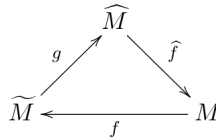
$$\phi t(s) = \phi(ts) , 0 \leq s \leq 1. \qquad (2.21)$$

Então $\tilde{\phi}(t) = [\phi t], 0 \leq t \leq 1$, é um caminho contínuo $\tilde{\phi}$, $Img(\phi) \subset \tilde{M}$, emanando a partir do ponto $\tilde{p}_0$, e

$$f (\tilde{\phi}(t)) = f ([\phi t]) = \phi(t) , 0 \leq t \leq 1. \qquad (2.22)$$

Como este levantamento do caminho ϕ termina no ponto $\tilde{\phi}(1) = [\phi]$ e a classe $[\phi]$ é um ponto arbitrário de $\tilde{M}$, concluímos que o espaço $\tilde{M}$ é conexo por caminhos. Por fim, se ϕ é um laço em p, então o caminho $\tilde{\phi}$ será um laço em $\tilde{p}$ se, e só se, $[\phi] = [p]$. Dessa forma, consideremos que o caminho $\gamma : [0, 1] \emptyset \tilde{M}$ é um laço no ponto $\tilde{p}$. Assim a composição de caminhos $f \circ \gamma$ no espaço M é um laço em p e o caminho γ é, por definição, o levantamento de $f \circ \gamma$. A conclusão segue novamente usando a definição de conjunto quociente de classes

de equivalência entre laços homotópicos módulo com os pontos finais dos caminhos.

Finalmente, para a propriedade (*p4*) consideramos $\hat{f} : \hat{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento onde o espaço $\hat{M}$ é conexo. Consideremos um ponto base $\hat{p} \in \hat{f}^{-1}(p)$ Queremos definir (no caso a única) aplicação g que torna comutativo o seguinte diagrama:

Considere um ponto $[\phi] \in \tilde{M}$ e denotemos $\hat{\phi}$ como sendo o único levantamento do caminho ϕ até um caminho contido em $\hat{M}$ com ponto inical $\hat{p}$. Definimos uma função g, $g([\phi]) = \hat{\phi}(1)$ satisfazendo a condição $\hat{f} \circ g = f$. Se um conjunto V varia em $\mathcal{B}$, as componentes conexas de $\tilde{f}_{-1}$ (V) variam ao longo da base $\hat{\mathcal{B}}$ para a topologia de $\hat{M}$. Vamos mostrar que a função *g* é contínua. De fato, se $\hat{V}$ é uma componente de $\hat{f}^{-1}(V)$, $V \in \mathcal{B}$, as componentes de $g^{-1}(\hat{V})$ estão contidas nas componentes de $f^{-1}(V)$.

Logo como queríamos *g* é contínua. Portanto, a função $f : \tilde{M} \to M$ é a função de recobrimento universal. A equivalência da segunda parte descrita em (*p4*) pode ser encontrada na referência [5] citada no início.

A seguir seguem alguns exemplos de recobrimento:

Exemplo 2.7. O recobrimento universal do n-toro é o $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.8. O recobrimento universal do plano projetivo $\mathbb{RP}^n$ para $n \geq 2$ é a esfera S^n.

Exemplo 2.9. O toro é um recobrimento duplo da garrafa de *Klein*.

Teorema 2.11. Se M é um espaço topológio conexo e conexo por caminhos e $\pi : \tilde{M} \to M$ seu recobrimento universal, então:

(i) $\pi_1(M)$ é discreto e isomorfo ao grupo de recobrimento Γ de $\tilde{M}$, onde, $\phi \in \Gamma$ se, e somente se, ϕ é homeomorfismo e $\pi \circ \phi = \pi$.

(ii) Γ induz uma ação livre e propriamente descontinua em $\tilde{M}$ com $\tilde{M}/\Gamma$ homeomorfo a M.

Demonstração: Para o fato de que $\pi_1(M)$ é discreto, veja ([4]) capítulo 1. Para os demais fatos consultar ([3]) capítulos 11 e 12.

2.3.3. Recobrimento Universal de uma Superfície de *Riemann*

Como vimos na subseção anterior o conceito de recobrimento é feito no caso

mais geral para espaços to- pológicos. Entretanto, devido a rigidez da teoria das funções holomorfas, no contexto das superfícies de *Riemann* propriedades adicionais surgem e nos guiam ao entendimento de sua classificação. Isso ocorre pois entendendo o recobrimento universal de uma superfície de *Riemann* reduzimos nossos problemas de classificação para uma classe específica de superfícies: As simplesmente conexas. De fato, uma das propri- edades descritas no teorema 2.10 é que o recobrimento universal de uma variedade é simplesmente conexo. Tais fatos começam a ser descritos pelo teorema a seguir:

Teorema 2.12. Se *M* é uma superfície de *Riemann* então seu espaço de recobrimento universal $\tilde{M}$ também é uma superfície de *Riemann* e a aplicação de recobrimento é holomorfa. Ainda:

(i) $\tilde{M}$ é único a menos de um biholomorfismo.

(ii) $\pi_1(M)$ é discreto e isomorfo a um subgrupo $\Gamma \subset Aut(\tilde{M})$.

(iii) Γ induz uma ação livre e propriamente descontinua em $\tilde{M}$ com $\tilde{M}/\Gamma$ equivalente a *M*.

Desta maneira, toda superfície de *Riemann* pode ser vista como o quociente de seu recobrimento universal por uma ação de seu grupo fundamental.

Demonstração: A demonstração deste teorema consiste em trazer para o contexto holomorfo as afirmações topológicas dos teoremas 2.10 e 2.11. Para verificar que $\tilde{M}$ é uma superfície de *Riemann*, tome um atlas complexo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de *M* tal que cada U_α é um aberto básico do recobrimento π, sem perda de generalidade. Se $\pi^{-1}(\tilde{U}_\alpha)$ é a união disjunta dos abertos $\widetilde{U}_\alpha^{(i)}$ homeomorfos a U_α, então um atlas complexo em $\tilde{M}$ é obtido pelas cartas $(U_\alpha^{(i)}, \varphi_\alpha^{(i)})$ com

$$\varphi_\alpha^{(i)} := \varphi_\alpha \circ \pi \,. \qquad (2.23)$$

Representada nesses sistemas de coordenadas, $\varphi_\alpha \circ \pi \circ (\varphi_\alpha^{(i)})^{-1}(z) = z$, ou seja, π é holomorfa.

Se $\pi_1 : \tilde{M}_1 \to M$ e $\pi_2 : \tilde{M}_2 \to M$ são dois recobrimentos universais relacionados pelo homeomorfismo Φ, então em coordenadas complexas como definidas acima temos que, quando bem definido para $z \in C$, $\varphi_{\beta,2}^{(j)} \circ \Phi \circ (\varphi_{\alpha,1}^{(i)})^{-1}(z) = z$. Logo o homeomorfismo Φ é um biholomorfismo que faz o diagrama abaixo comutar

(2.24)

Portanto $\tilde{M}$ está bem definido a menos de um biholomorfismo. Para $\tilde{M} = \tilde{M}1 = \tilde{M}2$ e $\pi = \pi 1 = \pi 2$, acabamos de provar que seu grupo de recobrimento Γ é formado por biholomorfismos, i.e., $\Gamma \subset Aut(\tilde{M})$. Seguindo a mesma linha de raciocínio, é fácil ver que a afirmação de $\tilde{M}/\Gamma$ ser homeomorfo a *M* no teorema 2.11, aqui se torna $\tilde{M}/\Gamma$ é biholomorfo a *M*, provando o teorema.

2.4. O TEOREMA DA UNIFORMIZAÇÃO DE *RIEMANN*

As três classes de superfícies de *Riemann* simplesmente conexas são as equivalentes ao plano complexo $\mathbb{C}$, à esfera de *Riemann* S^2 e ao semi-plano superior $\mathbb{H}$. Este é o teorema da uniformização. Para monstrarmos que são três classes distintas, *i.e.*, não existe biholomorfismo entre elas, basta verificarmos que, primeiramente, S^2 é compacta e $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$ não são. Depois observamos que qualquer biholomorfismo $C. \to \mathbb{H}$, compondo com a transformação de *Cayley* (1.10), nos dá uma função inteira de $\mathbb{C}$ no disco unitário que não é constante, contrariando o *Teorema de Liouville*[2].

A seguir vamos analizar algumas variantes do teorema da Uniformização de *Riemann* mencionadas no inicio desde capítulo. Começaremos com a versão em $\mathbb{C}$. Este teorema diz que: Dado um aberto *U* simplesmente conexo que não é o plano complexo $\mathbb{C}$ todo, então *U* é biholomorfo ao disco unitário centrado na origem *D*(0, 1). De uma maneira mais precisa, dado um ponto $z_0 \in U$ existe uma função biholomorfa $f : U \to D(0, 1)$ de modo que $f(z_0) = 0$. Esta função é unicamente determinada a menos de uma rotação, isto é, $e^{i\theta} f$ para algum $\theta \in \mathbb{R}$ também é um biholomorfismo entre *U* e o disco *D(0, 1)*. Se além disso, exigirmos que $f'(z_0) > 0$ então f é unicamente determinada.

Vimos no Teorema 2.6 que os automorfismos do disco *D(0, 1)* descritos na equação (2.16) são da forma $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$, $|\alpha| < 1$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Dessa forma, a unicidade do biholomorfismo entre *U* e *D(0, 1)* com as restrições descritas acima segue do seguinte fato: Sejam f e g dois biholomorfismos entre *U* e *D(0, 1)* satisfazendo $f'(0), g'(0) > 0$. Então, $f \circ g^{-1} : D(0, 1) \to D(0, 1)$ é um biholomorfismo do disco satisfazendo $f \circ g^{-1}(0) = 0$ e $(f \circ g^{-1})'(0) > 0$. Por (2.16) concluímos que $f \circ g{-}1 = Id$. Para concluir a demostração desse teorema, isto é, garantir a existência de tal biholomorfismo, precisamos provar os seguintes fatos:

1. Existem funções injetivas que mapeiam *U* no disco *D(0, 1)* de tal forma que um dado ponto $z_0 \in U$ seja levado na origem *0*.

2. Tal família de funções é relativamente compacta, isto é, dada uma sequência de funções nessa famíla, existe uma subsequência que converge uniformemente nas partes compactas de *U*.

3. A derivada de uma função f da família em um ponto z_0, $f'(z_0)$ é limitada em módulo. Toma-se uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nessa família tal que $|f'_n(z_0)| \xrightarrow{n\to\infty} |f'(z_0)|$, que é o supremo de todos os valores $|f'(z_0)$ para f variando na família. Prova-

2. O *Teorema de Liouville* afirma que toda função inteira (holomorfa em todo C) limitada deve ser constante.

se que existe um elemento f na família o qual $|f'(z_0)|$ é na verdade igual ao supremo e que de fato é o máximo. Assim, finalmente mostra-se que f fornece o biholomorfismo entre U e $D(0, 1)$. A prova então é reduzido ao *lema de Schwarz* para derivadas, Teorema 2.1.

Para maiores detalhes da demonstração de tais fatos, veja [13], capítulo 10, ou [14], capítulo 7.

Como o semi-plano superior $\mathbb{H}$ e o disco unitário centrado na origem $D(0, 1)$ são equivalentes pela transformação de *Cayley* $z \rightarrow \frac{z-i}{z+i}$ podemos reescrever o teorema da uniformização de *Riemann* da seguinte forma:

Teorema 2.13. Seja U um aberto simplesmente conexo em $\mathbb{C}$ que não é o plano complexo. Então existe um biholomorfismo entre U e o semi-plano superior $\mathbb{H}$, *i.e.*, U é equivalente a $\mathbb{H}$ como superfícies de *Riemann* mas não equivalente a $\mathbb{C}$.

O teorema da uniformização de *Riemann* não nos diz como encontrar explicitamente um biholomorfismo entre um aberto conexo do plano $\mathbb{C}$ e o disco unitário (e, portanto, com o semi-plano superior $\mathbb{H}$). A seguir vamos construir simples exemplos destes biholomorfismos.

Exemplo 2.10. Considere o primeiro quadrante do plano $\mathbb{C}$ isto é, o conjunto $U := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x, y > 0\}$. U é um conjunto aberto e conexo que não é o plano todo. A função $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ dada por $f(z) := z^2$ é um biholomorfismo. Inicialmente vamos verificar que f é inje- tora. De fato, dados $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in U$ então $z_1^2 = z_2^2 \leftrightarrow z_1 = z_2$ ou $z_1 = -z_2$. Mas o caso $z_1 = -z_2$ não pode ocorrer pois contraria o fato de que z_1 e z_2 estão no primeiro quadrante. Mostremos agora que f é sobrejetora. De fato, se $z \in U \rightarrow arg(z) \in (0, \pi) \rightarrow arg(z^2) \in (0, 2\pi)$. Finalmente vamos mostrar que f é holomorfa com inversa também holomorfa. Como f é um polinômio então ela é derivável e $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$, $\forall z_0 \in U$, já que $0 \notin U$. Logo, pelo teorema da função inversa f^{-1} é também holomorfa.

Exemplo 2.11. Usando o exemplo anterior podemos construir um biholomorfismo $g : U \rightarrow D(0, 1)$. Considere T: $\mathbb{H} \rightarrow D(0, 1)$ a transformação de *Cayley* $T(z) = (z - i)/(z + i)$. A função composta $g = T \circ f : U \rightarrow D(0, 1)$ dada por $g(z) := T(f(z)) = F(z^2) = (z^2 - i)/(z^2 + i)$ é biholomorfa pois é composição de funções biholomorfas.

Exemplo 2.12. Vamos mostrar que um setor do disco $D(0, 1)$ é biholomorfo ao próprio disco. Considere o setor circular $S := \{z = re^{i\theta}; r \in (0, 1), \theta \in (2\pi)\}$. Assim, S é um aberto conexo que não é o plano todo. A função real de variável real $r \rightarrow r^n$ mapeia o intervalo (0, 1) em si próprio. Além disso, a função (também real de variável real) $\theta \rightarrow n\theta$ leva o intervalo $(0, \frac{2\pi}{n})$ no intervalo $(0, 2\pi)$. Assim, a aplicação $f : S \rightarrow D(0, 1)$ dada por $f(z) := z^n$ é um biholomorfismo. De fato, f é injetora pois, se $arg(z_0) = 2\pi/n \rightarrow arg(z_0^n) = 2\pi \neq \frac{2\pi}{n}$ se $n \neq 1$. Além disso, f é sobrejetora pois $f(S) = \{z = \tilde{r}e^{i\tilde{\theta}} \in \mathbb{C}; \tilde{r} \in (0, 1), \tilde{\theta} \in (0,$

$2\pi)\}$. A função f é holomorfa e $f'(z_0) = nz_0^{n-1} \neq 0, \forall z_0 \in S$ já que, $0 \notin S$. Logo, pelo teorema da função inversa f^{-1} é holomorfa.

Exemplo 2.13. Usando o exemplo anterior podemos construir uma equivalência entre um setor $S \subset D(0, 1)$ e o semi-plano superior $\mathbb{H}$. A inversa da transformação de *Cayley* T é $T^{-1} : D(0, 1) \to \mathbb{H}$ que é dada por $T^{-1}(z) = i\frac{(z+1)}{z-1}$. Assim, a função composta $g = T^{-1} \circ f : S \to \mathbb{H}$ dada por $g(z) = T^{-1}(f(z)) = T^{-1}(z^n) = i\frac{z^n+1}{z^n-1}$ é uma equivalência já que é composição de biholomorfismos.

A seguir enunciaremos a versão compacta da uniformização para superfícies de *Riemann*.

Teorema 2.14. Seja *M* uma superfície de *Riemann* simplesmente conexa e compacta. Então *M* é biholo- morficamente equivalente à esfera de *Riemann* S^2.

Nossa principal referência para esta demonstração é [1]. Para entendê-la vamos precisar introduzir alguns conceitos e resultados que fogem um pouco do nosso contexto. Por isso indicamos os caminhos desta prova no apêndice B.

A versão não compacta da uniformização é dada à seguir. Sua demonstração segue uma linha similar à demonstração do teorema 2.14 para superfícies compactas. Para maiores detalhes, veja [1].

Teorema 2.15. Seja *M* uma superfície de *Riemann* simplesmente conexa e não compacta. Então *M* é biholomorficamente equivalente ao plano $\mathbb{C}$ ou ao semi-plano superior $\mathbb{H}$.

Resumindo, segue o teorema da uniformização.

Teorema 2.16 (Teorema da Uniformização). Seja *M* uma superfície de *Riemann* simplesmente conexa. Então *M* é biholomorficamente equivalente a uma, e somente uma, das seguintes superfícies de *Riemann*: o plano complexo $\mathbb{C}$, o semi-plano superior $\mathbb{H}$ ou a esfera de *Riemann* S^2.

2.5 Classificação das Superfícies de *Riemann*

Dados os teoremas do recobrimento universal (Teorema 2.12) e da uniformização (Teorema 2.16), uma superfície de *Riemann* M pertence a uma, e somente uma, das classes a seguir:

I. *M* é **elíptica**: seu recobrimento universal é a esfera de *Riemann* S^2;

II. *M* é **parabólica**: seu recobrimento universal é o plano complexo $\mathbb{C}$;

III. *M* é **hiperbólica**: seu recobrimento universal é o semi-plano superior $\mathbb{H}$;

Ainda, pelo Teorema 2.12, *M* é equivalente a $\tilde{M}/\Gamma$, onde Γ é um subgrupo isomorfo a $\pi_1(M)$ de automorfismos da sua superfície de recobrimento universal $\tilde{M}$ agindo de forma livre e propriamente descontínua.

A seguir examinamos cada uma dos três casos possíveis.

2.5.1 Superfícies de *Riemann* Elípticas

Neste caso, $\tilde{M} \cong S^2$ e $M \cong S^2/\Gamma$, sendo $Aut(S^2)$ o grupo das transformações de Möbius.

Teorema 2.17. Se Γ é subgrupo de automorfismos de S^2 que age de forma livre então ele é o subgrupo trivial. Em particular, toda superfície de *Riemann* elíptica é equivalente à esfera de *Riemann*.

Demonstração: Segundo o Teorema 2.8, o grupo de automorfismos da esfera de *Riemann* é formado pelas transformações de Möbius, que sempre possuem pelo menos um ponto fixo no plano estendido $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$. Mesmo a transformação $z \to z + b$ possui o infinito como ponto fixo. Logo, se Γ age livremente em S^2 então $\Gamma = \{I\}$.

2.5.2 Superfícies de *Riemann* Parabólicas

Neste caso, $\tilde{M} \neq \mathbb{C}$ e $M \cong = \mathbb{C}/\Gamma$, sendo $Aut(\mathbb{C})$ o grupo das transformações compexas afins $z \to az + b$, $a, b \in C$.

Teorema 2.18. Uma superfície de *Riemann* parabólica M é equivalente a uma, e somente uma, das superfícies abaixo:

(i) $\mathbb{C}$, se M é simplesmente conexa;

(ii) $\mathbb{C} - \{0\}$, se $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$;

(iii) $\mathbb{C}/\Lambda$, para algum reticulado Λ se $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^2$;

Demonstração: O primeiro item segue do Teorema 2.16. Supondo $\Gamma \neq \{I\}$, então a hipótese de ação livre implica que $T_b \in \Gamma$, sendo esta a translação $\to T_b(z) := z+b$, com $b \neq 0$. Neste caso $T_{nb} = (T_b)^n \in \Gamma$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades:

Possibilidade 1: Existe um elemento $b \in \mathbb{C}$ tal que Γ é o grupo cíclico gerado por T_b. Neste caso M é um cilindro e $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$. Segundo o Exemplo (1.11), ele deve ser biholomorfo ao plano sem a origem.

Possibilidade 2: Γ não é cíclico. Se chamarmos um elemento g de um grupo discreto G de minimal quando não existir $h \in G$ e $n > \mathbb{Z}$ com $n > 1$ e $g = h^n$, então Γ possui pelo menos dois elementos minimais distintos, b_1 e b_2, que necessariamente são $\mathbb{R}$-L.I.. Para verificarmos tal fato, sem perda de generalidade, tome o caso em que $b_1 = 1$ e $0 < b_2$. É fácil observar que tanto para b_2 racional quanto irracional, a ação de Γ não poderia ser propriamente descontínua. Logo dois elementos minimais distintos em Γ são $\mathbb{R}$-L.I, o que implica que Γ contém o reticulado Λ formado pelas translações $T_{mb1+nb2}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathbb{C}/\Lambda$ o toro formado pelo reticulado Λ. Se existisse $b_3 \in \Gamma - \Lambda$, então as translações T_{nb3} gerariam

uma ação livre e propriamente descontínua de $\mathbb{Z}$ no toro, o que é impossível. Logo, $\Lambda = \Gamma$.

2.5.3 Superfícies de *Riemann* Hiperbólicas

Neste caso, $\tilde{M} \cong \mathbb{H}$ e $M \cong \mathbb{H}/\Gamma$, sendo $Aut(\mathbb{H}) \cong PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$, o grupo das transformações especiais lineares projetivas. Determinar seus subgrupos discretos, que equivalente a de- terminar os subgrupos discretos de $SL(2,\mathbb{R})$, também chamados de **grupos Fuschianos**, é assunto bem mais complicado, algo que não vamos tratar aqui. De maneira geral, não existe método ou mecanismo universal para se encontrar explicitamente subgrupos de uma grande classe de grupos.

Como exemplos de superfícies de *Riemann* hiperbólicas, temos o disco unitário centrado na origem D e as superfícies compactas do bi-toro, tri-toro, etc.

CAPÍTULO 3

DAS MÉTRICAS *RIEMANNIANAS* ÀS ESTRUTURAS COMPLEXAS EM SUPERFÍCIES

Neste capítulo definiremos os conceitos de estruturas quasi-complexas e complexas em uma variedade real, além de uma ligação com métricas *Riemannianas* em superfícies de *Riemann*. Para isto precisaremos do leitor um conhecimento prévio de análise tensorial em variedades. Veja apêndice A.

3.1 ESTRUTURAS COMPLEXAS

Vimos no Capítulo 1 que, uma variedade complexa (em particular, uma superfície de *Riemann*) é uma generalização do conceito de superfícies em $\mathbb{R}^3$ onde, como espaço topológico pode localmente ser identi- ficado com o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ (no caso de uma superfície de *Riemann*, $\mathbb{C}$) e as “funções nela definidas” (mais precisamente, as funções de transição) são holomorfas. Certa parte da rigidez da teoria das funções holomorfas em $\mathbb{C}^n$ é naturalmente transmitida para as variedades complexas. Por exemplo, toda superfície de *Riemann* é orientada vista como variedade real. Isso ocorre pelo seguinto fato: Dadas duas cartas complexas ($U, \tilde{U}, \varphi$) e ($V, \tilde{V}, \psi$), a função de transição $f(z) := \varphi(\psi^{-1}(z))$ pode ser enten- dida como um mapeamento de um aberto de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ cujo jacobiano em um ponto z é simplesmente uma aplicação linear dada pela multiplicação por um número complexo $f'(z)$. É um fato bem conhecido de que o determinante real de uma aplicação linear dada pela multiplicação por um número complexo z_0 é igual a $|z_0|^2$, isto é, o módulo ao quadrado desse número, que é estritamente positivo (isto ocorre como consequência das equações de *Cauchy-Riemann* e o fato de que, por definição, as funções de transição são sempre não identicamente nulas e, consequentemente, $|z_0|^2 > 0$). Dessa forma, o atlas complexo é automaticamente um atlas orientado. Isso nos dá, por exemplo, um critério para excluir as superfícies não orientadas da classe das superfícies de *Riemann*. Aliás, demonstraremos mais adiante que toda superfície orientada admite uma estrutura que a faz uma superfície de *Riemann*.

Existem outras maneiras de se pensar uma superfície de *Riemann* (e, em geral, variedades complexas). Uma delas é fazendo o uso de certos tipos de “Estruturas Complexas”. No fundo, é uma das tentativas de se caracterizar variedades complexas em geral. Vamos descrever brevemente os fatos cruciais sobre essas estruturas, as quais serão utilizadas nas proximas seções.

3.1.1 Estruturas Complexas em Espaços Vetoriais

Definição 3.1. Uma **estrutura complexa** em um espaço vetorial real E é um endomorfismo linear $J : E \to E$ que satisfaz a equação

$$J^2 = -\mathrm{Id}_E \tag{3.1}$$

onde Id_E é a aplicação identidade no espaço E.

Podemos tornar um espaço vetorial real E em um espaço vetorial complexo definindo a multiplicação por um escalar complexo como se segue: Dado um vetor $v \in E$ e um escalar $a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ então,

$$(a + b\mathrm{i})v = av + bJv. \tag{3.2}$$

Assim, vemos que a aplicação J equivale à multiplicação por i $\in \mathbb{C}$. A ideía das estruturas complexas é a de transportar essa propriedade para variedades, isto é, definir de alguma maneira uma aplicação "J" em uma variedade real de dimensão par de modo que esta aplicação seja "equivalente" à multiplicação pela unidade imaginária i. Seguindo este raciocínio, vamos descrever todos os resultados pertinentes dessa construção, primeiramente no contexto linear.

Proposição 3.1. Sejam E um espaço vetorial real, dim $E = 2n$ e J uma estrutura complexa em E. Então, existem elementos $x\mathrm{i} \in E$, $1 \leq i \leq n$, tais que o conjunto

$$A := \{x1, ..., xn, Jx1, ..., Jxn\} \tag{3.3}$$

forma uma base para E.

Demonstração: Seja E um espaço vetorial real, dim $E = 2n$. Dada uma estrutura complexa J em E consideremos a complexificação de E por J, $E_{\mathbb{C}} = (E, J)$. Logo, $dim_{\mathbb{C}E} = n$. Assim, existem escalares não simultaneamente nulos $a_1 + \mathrm{i}a_{n+1}$, $a_n + \mathrm{i}a_{2n} \in \mathbb{C}$ (consequentemente os $a \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 2n$ são simultaneamente não nulos) tais que, para qualquer $x \in E\mathbb{C}$, $x = (a_1 + ia_{n+1})x_1 + ... + (a_n + ia_{2n})x_n$.

Mas como J equivale à multiplicação por i, a última igualdade é equivalente a

$$x = a1x1 + ... + anxn + an{+}1Jx1 + ... + a2nJxn \tag{3.4}$$

o que significa dizer que $\{x_1, ..., x_n, Jx_1, ..., Jx_n\}$ é uma base de E.

O espaço $\mathbb{R}^{2m}$ naturalmente carrega a estrutura complexa de $\mathbb{C}^m$ por meio da aplicação

$$(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_m) \mapsto (-y_1, ..., -y_m, x_1, ..., x_m). \tag{3.5}$$

Em termos da base canônica de R^{2m} temos a representação matricial

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

onde I_m é a matriz identidade de ordem m. Os dois teoremas a seguir, apesar de simples, desempenham um papel importante na teoria geral das estruturas complexas.

Teorema 3.1. Sejam V e V' espaços vetoriais e J e J' duas estruturas complexas em V e V' respectivamente. Olhando para (V, J) e (V', J') como espaços vetoriais complexos então uma função $f : V \to V'$, *ℝ-linear* é *ℂ-linear* se, e só se,

$$J' \circ f = f \circ J. \quad (3.7)$$

Demonstração: Para provar que f é *ℂ-linear*, basta provar que $f(iv) = if(v)$, para todo $v \in V$, já que, as condições

1. $f(v + w) = f(v) + (w), \forall v = v_1 + iv_2, \forall w = w_1 + iw_2 \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}, \forall v = v_1 + iv_2 \in V$.

são consequências da ℝ-linearidade de f. Assuma então que $f : V \to V'$ é ℝ–linear e que f satisfaça a equação 3.7. Então, temos as seguintes implicações: $J'2 \circ f = J' \circ f \circ J \to -Id \circ f = J' \circ f \circ J \to f = -J' \circ f \circ J$. Como J e J' equivalem a multiplicação por i, dado qualquer $v \in V$ então $f(v) = -if(\tilde{i}v) \to if(v) = f(iv), \forall v \in V$. Logo f é ℂ-linear. Mostremos agora que se $f : V \to V'$ é ℂ-linear então $J' \circ f = f \circ J$. Para isso mostremos que $J' \circ f(v) - f \circ J(v) = 0, \forall v \in V$. Como J equivale a multiplicação por i, $J' \circ f(v) - f \circ J(v) = if(v) = f(iv) = f(iv) - f(iv) = 0, \forall v \in V$. Logo o resultado segue.

Definição 3.2. Uma função ℝ-linear $f : V \to \mathbb{C}$ é dita ser C-antilinear se dada uma estrutura complexa $J : V \to V$ então

$$f(Jv) = -if(v), \forall v \in V. \quad (3.8)$$

Teorema 3.2. Seja $A : V \to \mathbb{C}$ uma função ℝ – linear. Então A se escreve de maneira única como soma de funções ℂ-lineares e ℂ-antilineares.

Demonstração: Precisamos provar a existência e a unicidade de tais funções ℂ-lineares e ℂ-antilineares. (Existência) - Defina:

$$A'v = \frac{1}{2}(Av - iA(Jv)) \quad e \quad A''v = \frac{1}{2}(Av + iA(Jv)) \quad (3.9)$$

onde $A : V \to \mathbb{C}$ é ℝ-linear. Dessa forma, $A'v + A''v = Av$ e $A'(Jv) = i\frac{1}{2}(Av - iA(Jv))$

e, portanto, A' é $\mathbb{C}$–linear. De maneira análoga mostramos que A''(Jv) = –iA''(v). Logo A'' é $\mathbb{C}$-antilinear. (Unicidade) - Suponha que existam B'v = ½ (Bv – B(Jv)) e B''v = ½ (Bv + B(Jv)) satisfazendo A = B' + B''. Assim, B' é $\mathbb{C}$-linear e B'' é $\mathbb{C}$-antilinear. Provemos que A' = B' e que A'' = B''. De fato, $0 = A - A = [\ ½\ (Av - iA(Jv)) + ½\ (Av + iA(Jv))] - [\ ½\ (Bv - iB(Jv)) + ½\ (Bv + iB(Jv))] = ½\ Av + ½\ Av - [\ ½\ Bv + ½\ Bv] = Av - Bv = (A - B)v$. Logo $A = B$ e, consequentemente, $A' = B'$ e $A'' = B''$. Assim, o teorema está provado.

3.1.2 Estruturas Complexas em Variedades

Relembramos que um campo tensorial do tipo 1-covariante e 1-contravariante é , para cada $p \in M$, um endomorfismo linear $J_p : T_pM \to T_pM$ que varia diferenciavelmente ao longo de M.

Definição 3.3. Uma **estrutura quasi-complexa** em uma variedade real M é um campo tensorial do tipo 1-covariante e 1-contravariante que para cada $p \in M$ é uma estrura complexa linear em T_pM, *i.e.*, satisfaz a equação

$$J^2_p = -Id_{T_p M}. \qquad (3.10)$$

Dizemos que ela é uma **estrutura complexa** se existir um atlas $A = \{(V_k, \varphi_k); j \in I\}$, $\varphi_k : U_k \subset M \to V_k \subset R^{2m}$ tal que, em qualquer um de seus sistemas de coordenadas tenha-se J representado pela matriz

$$J_{\varphi_k}(x) = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \forall x \in V_k \subset \mathbb{R}^{2m} \qquad (3.11)$$

onde I_m é a matriz identidade de ordem m.

Na definição de estrutura quasi-complexa J em M, a matriz $2m \times 2m$ que a representa em um sistema de coordenadas qualquer tem a forma

$$J(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

com

$$A^2 = -BC\ ,\ D^2 = -CB\ ,\ AB + BD = I_m\ ,\ CA + DC = -I_m\ , \qquad (3.13)$$

onde A, B, C, D são funções matriciais de ordem m definidas no domínio do sistema de coordenadas. Dessa forma, J_p recebe o nome de "quasi-complexa"pois não necessariamente ela equivale à multiplicação por $i \in \mathbb{C}$, como o ocorre na definição de estrutura complexa J em um espaço vetorial real. Assim, definimos a noção de estrutura complexa J como aquela que, em uma variedade, desempenha o papel da unidade

imaginária $\mathfrak{i}$ localmente como descrito no caso linear (3.6). Assim, podemos dizer que uma estrutura complexa em uma variedade é uma estrutura quasi-complexa com uma condição extra de integrabilidade.

Uma pergunta natural que aparece é a seguinte: Dada uma estrutura quasi-complexa J, ela é complexa? A resposta é sim, para dim $M = 2$, como veremos mais adiante no teorema 3.6, e não, se dim M ≥ 4. Existe um critério para decidir se uma estrutura quasi-complexa é complexa. Não abordaremos esse fato aqui, que consiste em definir um tensor de "torção" para *J* que a caracteriza como complexa se, e somente se, ele for identicamente nulo ([6]).

Exemplo 3.1. $\mathbb{C}^n$ tem uma estrutura complexa canônica J_0 que coincide com a linear definida em (3.6).

Exemplo 3.2. S^6 tem uma estrutura quasi-complexa que não é complexa (Veja [6], pag.140). Em um trabalho ainda sob o escrutínio da comunidade matemática no período de escrita deste texto, Sir. Michael Atiyah afirma que S^6 não possua nenhuma estrutura complexa ([9]).

Vamos enunciar agora os dois resultados centrais sobre estrutura complexas em variedades. O resultado chave para esse fato, junto com os enunciados dos teoremas são:

Teorema 3.3. Uma função $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ preserva a estrutura complexa de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, isto é,

$$df \circ J_0 = J_0 \circ df \tag{3.14}$$

se, e só se, f for holomorfa.

Demonstração: Esta demonstração consiste em um procedimento direto de verificar que df satisfaz (3.14) se, e somente se, f satisfaz as equações de *Cauchy-Riemann* (1.1).

A definição estrutura complexa é tomada como ponto de partida para tornar, dentro de certas condições, uma variedade de dimensão *2m* em uma variedade de dimensão complexa m. Isso se deve ao fato de que a estrutura complexa *J* nos dá uma condição para determinar se funções definidas na variedade satisfazem as equações de *Cauchy-Riemann* e, assim, temos um critério para verificar se uma diferencial real é uma diferencial complexa.

Seja $M_{\mathbb{C}}$ uma variedade complexa de dimensão complexa *m*, então ela pode ser vista como uma variedade real *M* de dimensão *2m* munida de uma estrutura complexa *J* dada pela multiplicação local por $\mathfrak{i}$ definida em uma carta complexa $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}^m$. De forma contrária, se M é uma variedade real de dimensão *2m* e *J* uma estrutura complexa em *M*, então um atlas em que *J* assume a forma canônica (3.11) é um atlas onde as mudanças de coordenadas satisfazem as equações (3.14), e portanto, as equações de *Cauchy-Riemann*. Logo ele é um atlas complexo.

Assim obtivemos que:

Teorema 3.4. Uma variedade complexa $M_{\mathbb{C}}$ é equivalente a uma variedade real *M* munida de uma estrutura complexa *J*, com $\dim M = 2 \dim_{\mathbb{C}} M_{\mathbb{C}}$.

3.2 A RELAÇÃO ENTRE ESTRUTURAS *RIEMANNIANAS* E COMPLEXAS EM SUPERFÍCIES ORIENTADAS

No restante do capítulo, *M* será uma superfície[1] orientada. Nosso principal objetivo é estudar a projeção canônica do espaço das métricas *Riemnnianas* em *M* sobre o espaço das estruturas complexas sobre *M*. Para tal, precisaremos recordar alguns conceitos.

Uma **métrica *Riemanniana*** em M é um campo tensorial 2-covariante que em cada ponto $p \in M$ induz um produto interno em T_pM, *i.e.*, uma forma bilinear simétrica e definida positiva. Em coordenadas (x^1, x^2) temos suas componentes dadas por

$$\gamma_{ij} := \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{3.15}$$

Portanto temos a matriz simétrica e inversível, já que γ é não-degenerada,

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

que também é representada por

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \gamma_{ij}\, dx^i dx^j = E(dx^1)^2 + 2F dx^1 dx^2 + G(dx^2)^2. \tag{3.17}$$

Sua inversa é denotada por

$$(\gamma^{ij}) = \begin{pmatrix} \gamma^{11} & \gamma^{12} \\ \gamma^{21} & \gamma^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

que define um campo tensorial 2-contravariante tal que, para cada $p \in M$, é um produto interno no espaço cotangente $T_p{}^*M$ (Veja apêndice A). Assim, temos a relação

$$\sum_{k=1}^{2} \gamma^{ik}\, \gamma_{kj} = \delta^i_j = \begin{cases} 1\ se\ i \neq j. \\ 0,\ se\ i = j. \end{cases} \tag{3.19}$$

1. Uma variedade de dimensão 2.

Uma métrica *Riemanniana* γ define uma forma de área, que é uma 2-forma que não se anula em nenhum ponto de *M*, segundo a expressão local em coordenadas

$$\omega_\gamma = \sqrt{|\gamma|} dx^1 \wedge dx^2 \,, \tag{3.20}$$

onde $|\gamma|$ é o determinante da matriz (γ_{ij}), *i.e.*,

$$|\gamma| := det(\gamma_{ij}) = EG - F^2 > 0. \tag{3.21}$$

O fato de $|\gamma| > 0$ é independente do sistema de coordenadas adotado e pode ser estendida para todo *M* devido sua condição de orientabilidade (veja Apêndice A).

Podemos agora definir a projeção canônica J *[γ]* de uma estrutura *Riemann*iana em uma complexa na superfície M:

Definição 3.4. A **projeção canônica de uma estrutura *Riemanniana* em uma complexa**, denotada por *J [γ]*, ou simplesmente *J* quando o contexto estiver claro, é contravariante em *M* que satisfaz a relação

$$\gamma p(J_p \cdot u, v) = \omega\gamma,p(u, v), \tag{3.22}$$

para todos vetores *u, v* є T_pM e todo ponto p є M.

De fato *J* está bem definida pela relação (3.22) e é um endomorfismo linear em cada espaço tangente, pois tanto γ quanto ωγ são bilineares e não-degeneradas[2]. Ela é unicamente definida. De fato, sejam J_1 e J_2 satisfazendo a equação (3.22). Então, em um espaço tangente qualquer

$$\gamma(J_1 \cdot u, v) - \gamma(J_2 \cdot u, v) = 0 \rightarrow \gamma((J_1 - J_2) \cdot u, v) = 0 \,, \tag{3.23}$$

para todos vetores u, v є T∗M. Como γ é não-degenerada, $J_1 \cdot u = J_2 \cdot u$, para todo u, v є T∗M e, portanto, $J_1 = J_2$. Em coordenadas

$$J_l^k = \sum_i \gamma^{ki} \epsilon_{il} \sqrt{|\gamma|} \tag{3.24}$$

com є12 = −є21 = 1 e є11 = є22 = 0. Como

$$\frac{1}{|\gamma|} = \det(\gamma^{ij}) = \sum_{i,j} \epsilon_{ij} \gamma^{1i} \gamma^{2j} \tag{3.25}$$

2. Uma forma bilinear b em um espaço vetorial de dimensão finita é não-degenerada quando a matriz que a representa em uma base qualquer, (bij), tem determinante não nulo.

Podemos verificar diretamente que $J^2 = -Id$ ou seja,

$$\sum_i J_i^k J_l^i = -\delta_l^k. \tag{3.26}$$

Logo J é uma estrutura quasi-complexa. Explicitamente em termos matriciais, se γ e sua inversa são expressas como nas equações (3.16) e (3.18), então J é dada por

$$\mathcal{J}[\gamma] = J = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{pmatrix} F & G \\ -E & -F \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Existem sistemas de coordenadas especiais (x, y) em M, chamadas de coordenadas conformalmente planas ou isotérmicas (veja [10]). Nelas γ satisfaz as relações $E = G$ e $F = 0$, *i.e.*,.

$$\gamma = E(dx^2 + dy^2). \tag{3.28}$$

Assim, nesse sistema de coordenadas,

$$\mathcal{J}[\gamma] = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Assim, provamos o importante teorema:

Teorema 3.5. A projeção canônica de uma métrica *Riemanniana* γ em M é a única estrutura complexa $J[\gamma]$ em M cujas coordenadas complexas coincidem com as coordenadas isotérmicas de γ.

3.3 PROPRIEDADES DA PROJEÇÃO *J [Γ]*

Em busca das propriedades da função $J[\gamma]$, fixamos a notação para dois espaços importantes definidos a partir de uma superfície M, que são:

- $RM(M)$: o espaço das métricas *Riemannianas* sobre M ;
- $CS(M)$: o espaço das estruturas complexas sobre M.

É importante observar que nenhum dos conjuntos acima é vazio, pois em uma superfície M sempre existe uma métrica *Riemanniana*[3] γ. Logo, também sempre existe uma estrutura complexa $J[\gamma]$ em M. A inversa também é verdadeira, o que segue imediatamente do teorema abaixo:

3. Esta afirmação vale para variedades em geral e é uma aplicação direta da existência de partições da unidade. Como exemplo, veja [4].

Teorema 3.6. A projeção canônica $J : RM(M) \rightarrow CS(M)$ é sobrejetora. Mais ainda, se J é uma estrutura quasi-complexa em uma superfície orientada M, então existe uma métrica *Riemann*iana γ em M tal que $J[\gamma] = J$. Em particular, toda estrutura quasi-complexa em uma superfície é complexa.

Demonstração: Primeiramente, como M é orientada, existe uma forma de área ω em M. Sabemos que $(\det J)^2 = \det(-Id) = 1$. Sem perda de generalidade, tomaremos $\det(J) = 1$. Assim

$$\omega(J \cdot u, J \cdot v) = \det(J)\, \omega(u, v) = \omega(u, v) \qquad (3.30)$$

para todos vetores $u, v \in T_*M$ tangentes a M em um ponto qualquer. Defina o campo tensorial 2- covariante

$$\gamma(u, v) := -\omega(J \cdot u, v)\,, \qquad (3.31)$$

Então temos que γ é uma métrica *Riemanniana* em M com $\omega\gamma = \omega$ e $J[\gamma] = J$. De fato, γ é bilinear pois ω é forma de área (em particular uma 2-forma) e J é linear. É simétrica pois como ω é anti-simétrica e J é estrutura quasi-complexa que é preservada de acordo com a equação (3.30) então, para qualquer (u, v)

$$\gamma(v, u) = -\omega(J \cdot v, u) = -\omega(J2 \cdot v, J \cdot u) = -\omega(-v, J \cdot u) = \omega(v, J \cdot u) = \gamma(u, v).$$

É positiva definida pois necessariamente, uma vez que $\{u, J \cdot u\}$ é $L.I.$ para $u \neq 0$ (veja proposição 3.1), temos ou

$$\gamma(u, u) = \omega p(J \cdot u, u) > 0 \quad , \quad \forall p \in M, \forall u \in TpM$$

ou

$$\gamma(u, u) = \omega p(J \cdot u, u) < 0 \quad , \quad \forall p \in M, \forall u \in TpM.$$

De fato, caso contrário, dado qualquer $p \in M$ (que é considerada conexa) com $\tilde{u}$, $\hat{u}$ $\in$ TpM de modo que

$$\omega p(J \cdot \tilde{u}, \tilde{u}) > 0 \quad \text{e} \quad \omega p(J \cdot \hat{u}, \hat{u}) < 0$$

então existiria $v \in T_pM$ de forma que $\omega_p(J \cdot v, v) = 0$, contrariando a não degenerescência de ω. Portanto, sem perda de generalidade, assumimos que a segunda desigualdade é satisfeita, implicando que γ é métrica *Riemann*iana (caso contrário, trocaríamos o sinal da escolha de orientação ω).

Tomando um campo vetorial e1 que não se anula em nenhum de um aberto U de M, definimos um "referencial móvel" $\{e_1, e_2\}$ em U com $e_2 := J \cdot e_1$, e consequentemente J ·

$e_2 = -e_1$. Assim,

$$\gamma(e1, e1) = \gamma(e2, e2) = \omega 12 := \omega(e1, e2) > 0$$

$$\gamma(e1, e2) = \gamma(e2, e1) = 0$$

já que γ é simétrica. Portanto, considerando a forma de área definida por γ, ωγ,

$$\omega_\gamma(e_1, e_2) = \sqrt{\gamma(e_1, e_1)\gamma(e_2, e_2) - \gamma(e_1, e_2)^2} = \sqrt{\omega_{12}^2} = \omega_{12}$$

ou seja, $\omega\gamma = \omega$. Em particular,

$$\gamma(J \cdot u, v) = \omega(u, v) = \omega\gamma(u, v) \tag{3.32}$$

implicando na equação (3.22). Em outras palavras, provamos que dado J quasi-complexa, existe métrica γ com $J[\gamma] = J$, implicando que J é complexa (veja discução na Seção 3.2). Com isto J é uma aplicação sobrejetora.

3.3.1 A Relação com a Geometria Conforme

Duas métricas *Riemannianas* γ_1 e γ_2 são **conformemente relacionadas** quando existe uma função dife- renciável ψ : M → R com

$$\gamma 1 = e^{2\psi} \gamma 2 . \tag{3.33}$$

Explicitamente, em um sistema de coordenadas qualquer,

$$\psi = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|} \right). \tag{3.34}$$

Teorema 3.7. Duas métricas γ_1 e γ_2 são conformemente relacionadas se, e só se,

$$J[\gamma 1] = J[\gamma 2]. \tag{3.35}$$

Demonstração: Denotemos por simplicidade $J[\gamma]$ por J. Suponha que, para alguma $\psi = \psi(x, y)$, $\gamma 1 = e^{2\psi}\gamma 2$. Assim, $|\gamma 1| = e^{4\psi} |\gamma_2|$. Portanto, $\sqrt{|\gamma_1|} = e^{2\psi}\sqrt{|\gamma_2|}$ e $\gamma_{(1)}^{ij} = e^{-2\psi}\gamma_{(2)}^{ij}$. Logo, $J(\gamma 1) = J(\gamma 2)$.

A recíproca segue do seguinte fato: Se

$$J_l^k = \sum_i \gamma_1^{ki} \epsilon_{il} \sqrt{|\gamma_{(1)}|} = \sum_i \gamma_2^{ki} \epsilon_{il} \sqrt{|\gamma_2|} \tag{3.36}$$

implica que

$$\sum_i (\gamma^{ki}_{(1)}\sqrt{|\gamma_{(1)}|} - \gamma^{ki}_{(2)}\sqrt{|\gamma_{(2)}|})\epsilon_{il} = 0. \qquad (3.37)$$

Porém, se $\sum_i \omega^{ki}{}_{\epsilon il} = 0$ então, $\omega^{ki} = 0,\ k, i = 1, 2$. De fato, como $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ e $\epsilon_{1,2} = -\epsilon_{21} = 1$ então:

$$\begin{aligned}
\omega^{11}\epsilon_{12} + \omega^{12}\epsilon_{22} &= 0 \rightarrow \omega^{11} = 0\\
\omega^{11}\epsilon_{11} + \omega^{12}\epsilon_{21} &= 0 \rightarrow \omega^{12} = 0\\
\omega^{21}\epsilon_{11} + \omega^{22}\epsilon_{21} &= 0 \rightarrow \omega^{22} = 0.\\
\omega^{21}\epsilon_{12} + \omega^{22}\epsilon_{22} &= 0 \rightarrow \omega^{21} = 0.
\end{aligned} \qquad (3.38)$$

Logo, $\gamma^{ki}_{(1)} = \sqrt{\frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|}}\gamma^{ki}_{(2)}$. Como o quociente $\frac{|\gamma_1|}{|\gamma_2|}$ independe do sistema de coordenadas, apesar de $|\gamma 1|$ e $|\gamma 2|$ dependerem, temos que ψ como na equação (3.34) está bem definida em *M*, o que implica $\gamma 1 = e^{2\psi}\gamma 2$.

Queremos agora usar o teorema da uniformização para mostrar que qualquer métrica *Riemanniana* γ em uma superfície orientada *M* é conformemente equivalente a uma métrica de curvatura constante. Porém antes, recordemos das noções fundamentais envolvendo grupos de isometrias.

Uma **isometria** de uma superfície *Riemann*iana (*M, γ*) é um difeomorfismo *ϕ* de *M* que deixa a métrica invariante, *i.e., ϕ*γ = γ*, onde o "pull-back"de um campo tensorial 2-covariante b é definido por

$$(\phi^*b)_p(u, v) := b_{\phi(p)}(d\phi(p)\cdot u, d\phi(p)\cdot v) \qquad u, v \in T_pM.$$

É simples verificar que

$$(\phi \circ \psi)^*b = \psi^*(\phi^*b),$$

e portanto, o conjunto das isometrias de (*M, γ*) forma um grupo com a operação de composição, chamado de **grupo de isometrias** de (*M, γ*), ou simplesmente *L(M, γ)*. Dado a forma de área *ωγ* definida por *γ*, o subgrupo de *L(M, γ)* formado pelas isometrias ϕ que preservam esta forma de área, *i.e., ϕ*ωγ = ωγ*, é denotado por *L0(M, γ)*.

Teorema 3.8. Seja (*Mκ, γκ*) uma das superfícies *Riemannianas*:

• $\kappa = 0$, $M0 = \mathbb{R}^2$ com a métrica Euclideana γ_0;

• κ = 1, M_1 é a esfera de raio 1 no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e a métrica *γ1* dada pela primeira forma fundamental;

• $\kappa = -1$, M_{-1} é o semi-plano superior em $\mathbb{R}^2$ com a métrica de Lobachewsky $\gamma_{-1} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2),\ y > 0$.

A superfície de *Riemann* (M_κ, J_κ), com $J_\kappa := J[\gamma_\kappa]$, é exatamente uma das três abaixo:

- $\kappa = 0$, ela é o plano complexo $\mathbb{C}$;
- $\kappa = 1$, ela é a esfera de *Riemann* $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$;
- $\kappa = -1$, ela é o semi-plano superior $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$;

Ainda, se o subgrupo $\Gamma \subset Aut(M_\kappa, J_\kappa)$ age de forma livre e propriamente descontínua em M_κ, então $\Gamma \subset L_0(M_\kappa, \gamma_\kappa)$, isto é, γ é formado por isometrias de γ_κ que preservam sua orientação.

Demonstração: Podemos ”condensar”as três métricas acima em uma única fórmula:

$$\gamma_\kappa = \frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)\right)^2}\,, \tag{3.39}$$

que representa a primeira forma fundamental da esfera S^2 no espaço Euclidiano no sistema de coordenadas estereográficas se $\kappa = 1$, a métrica Euclidiana em $\mathbb{R}^2$ se $\kappa = 0$ e , para $\kappa = -1$, tomando o biholomorfismo análogo à transformação de Cayley (1.10),

$$\psi(z) = 2\,\frac{z - \boldsymbol{i}}{z + \boldsymbol{i}}\,,$$

temos que ele é também uma isometria do semi-plano de Lobachevsky sobre o disco de Poincaré, este definido pelo disco de raio 2 em $\mathbb{C}$ munido da métrica acima com $\kappa = -1$, *i.e.,*

$$\frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right) = \psi^*\left(\frac{dx^2 + dy^2}{\left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right)^2}\right). \tag{3.40}$$

Logo podemos trocar o semi-plano de Lobachevsky pelo disco de Poincaré em nossa demonstração.

Podemos observar que γ_κ é um múltiplo conforme da métrica usual do plano euclidiano. Portanto, sendo Id a matriz identidade, a representação matricial de γ_κ é $\frac{1}{\phi_k^2}$ *Ld*. Dessa forma,

$$\mathcal{J}[\gamma] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como vimos no teorema 2.17, se Γ é subgrupo da esfera $S^2 = \bar{\mathbb{C}}$ que age de forma livre e propriamente descontínua então, $\Gamma = \{I\}$, já que toda transformação de Möbius tem pelo menos um ponto fixo em S^2.

Ainda, para o caso do plano $\mathbb{C}$, pelo teorema 2.18, vimos que Γ agindo de forma

livre e propriamente descontinua necessariamente deve ser constituído das translações por b, $z \mapsto z + b$. Obviamente, para esses dois casos Γ é subgrupo do grupo de isometrias. Já para o semi-plano, o grupo de automorfismos coincide com a componente conexa da identidade do grupo de isometrias, ambos isomorfos a $PSL(2, \mathbb{R})$ (proposição 2.4.16, [8]).

Obs 3.1. Podemos observar que se T é uma transformação de Möbius que é uma isometria então, dado $\lambda \neq 1$, λT possivelmente não é uma isometria. Além disso, a aplicação $z \to z$ é uma isometria da esfera (que não preserva orientação) que não é Möbius. De fato, temos "mais" automorfismos na esfera do que isometrias. Além disso, as únicas isometrias de S^2 que preservam a orientação são as rotações, que constituem um subgrupo das isometrias da esfera.

Ainda, as isometrias do plano são as rotações, translações e as reflexões. Porém, somente as duas primeiras preservam a orientação (no caso, as reflexões invertem a orientação). Ainda, as rotações possuem apenas um ponto fixo em $\mathbb{R}^2$ a saber, a origem 0. Logo, novamente temos que existem "mais" automorfismos no plano do que isometrias.

Corolário 3.1. Toda superfície de *Riemann* (M, J) admite uma métrica *Riemanniana* γ de curvatura cons- tante κ tal que $J[\gamma] = J$ e:

(i) Se ela é elíptica então $\kappa = 1$;

(ii) Se ela é parabólica então $\kappa = 0$;

(iii) Se ela é hiperbólica então $\kappa = -1$;

Demonstração: A demonstração deste fato segue do teorema da uniformização e do teorema 3.8. Fare- mos apenas o caso de curvatura nula $\kappa = 0$. Analogamente, prova-se os casos $\kappa = 1$ e $\kappa = -1$.

Sendo M parabólica, do teorema 2.18 temos um biholomorfismo $\phi : M \to C/\Gamma$ para dado subgrupo discreto Γ de automorfismos de $(\mathbb{C}, J_0)$. Segundo o teorema 3.8, Γ é também um subgrupo de isometria da métrica Euclidiana γ_0. Logo podemos definir a métrica $\tilde{\gamma}_0$ em $\mathbb{C}/\Gamma$ como sendo a única tal que seu "*pull-back*" com a projeção canônica de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}/\Gamma$ seja γ_0. Assim, $\gamma := \phi^*\tilde{\gamma}_0$ é uma métrica de curvatura nula em M.

Corolário 3.2. Toda métrica *Riemanniana* γ em uma superfície M é conformemente equivalente a uma métrica de curvatura constante κ, sendo $\kappa = 1$, $\kappa = 0$ ou $\kappa = -1$ para os respectivos casos elíptico, parabólico ou hiperbólico.

Demonstração: Tome a estrutura complexa $J = J[\gamma]$. Utilizando as notações do Teorema 3.8, como consequências do Teorema da Uniformização, existe um biholomorfismo Φ de (M, J) sobre $(M_\kappa/\Gamma, J_\kappa)$ para algum $\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ e Γ subgrupo de $Aut(M_\kappa, J_\kappa)$ agindo de forma livre e propriamente descontínua em $M\kappa$. Tomando $\tilde{\gamma} := \Phi^*\gamma_\kappa$, esta define uma métrica *Riemanniana* em M de curvatura constante κ e tal que $J = J[\gamma] = J[\tilde{\gamma}]$, pois os ternos $(M_\kappa/\Gamma, J_\kappa, \gamma_\kappa)$ e $(M, J, \tilde{\gamma})$ são essencialmente os mesmos mediante identificação com o difeomorfismo Φ e, pelo Teorema 3.8, $J_\kappa = J[\gamma_\kappa]$. Pelo Teorema 3.7, γ e $\tilde{\gamma}$ são conformemente relacionadas.

3.3.2 Diferenciabilidade de J [γ]

Queremos introduzir uma noção de diferenciabilidade para a aplicação $J[\gamma]$. Os espaços *RM(M)* das métricas *Riemannianas* sobre *M* e *CS(M)* das estruturas complexas sobre *M* não tem estrutura de espaço vetorial, pois nesses caso as operações de soma e multiplicação por escalar não são fechadas nesses espaços. Porém, *RM(M)* define uma condição aberta no espaço vetorial das formas bilineares simétricas em *M*, $B(M) \subset T^0{}_2(M)$, pois a soma convexa de duas métricas $\gamma 1$, $\gamma 2 \in RM(M)$ satisfaz

$$\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\,\gamma_2 \in RM(M)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Mais do que isto, γ_2 pode ser até degenerada, desde que "pequena". Logo podemos tratar *RM(M)* como um "aberto"de *B(M)*, mesmo não tendo entrado na questão da definição exata de sua topologia. Como *CS(M)* é subconjunto do espaço vetorial $T^1{}_1(M)$ dos campos tensoriais 1-covariante e 1-contravariante sobre *M*, podemos introduzir uma noção de diferenciabilidade para a função J [γ] da mesma forma que temos a diferenciabilidade de uma função de um aberto de um espaço vetorial em outro. A seguir vamos relembrar os conceitos elementares dos quais precisamos para fazer tal analogia.

Em um contexto informal, dados espaços vetoriais[4] *E, F* denotamos por $L(F\,;E)$ o conjunto de todas as transformações lineares $L : F \to E$ e notamos que este espaço tem estrutura de espaço vetorial. Nesse contexto, definimos diferenciabilidade da seguinte forma: seja um aberto $U \subset F$ contendo o ponto x. Então $f : U \to E$ é diferenciável no ponto x se existe uma aplicação linear $\delta(x) : F \to E$ satisfazendo

$$f(x+\epsilon h) = f(x) + \epsilon\,\delta(x)\cdot h + o(\epsilon) \qquad (3.41)$$

para todo *h* em um subespaço denso de *F*, onde

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0\,. \qquad (3.42)$$

Portanto, a definição de derivada é feita de modo a dizer que, nas vizinhanças do ponto *x*, os valores assumidos por f podem ser aproximados por uma aplicação linear δ a menos de um fator aditivo $f(x)$ com um erro dado pelas propriedades de limites das funções $o(\epsilon)$ descrita acima. Assim, dado um aberto $U \subset F$ no qual uma aplicação $f : U \to E$ é diferenciável temos definida uma transformação $\delta : U \to L(V\,;E)$, que para cada $x \in U$ temos associada a aplicação linear $df(x) := \delta(x) \in L(V\,;E)$, que chamamos de derivada de f em U.

4. Formalmente, são espaços vetoriais topológicos completos e localmente convexos, e a derivada é a derivada de Frechet.

Os exemplos de derivadas que daremos a seguir servem para os nossos propósitos ao estudar a noção de diferenciabilidade para $J[\gamma]$.

Exemplo 3.3. Uma transformação bilinear $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e sua derivada é a (outra) transformação bilinear $dB: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por

$$dB(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y). \qquad (3.43)$$

Exemplo 3.4. Sabemos que o conjunto $GL(\mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^n)$ dos endomorfismos lineares inversíveis de $\mathbb{R}^n$ é um aberto, pois $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ se, e só se, $det(A) \neq 0$, já que a função $det: L(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ é contínua. Logo, podemos falar de diferenciabilidade para a aplicação inversão $f: GL(\mathbb{R}^n) \to GL(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$A \to f(A) = A^{-1}. \qquad (3.44)$$

Ela é diferenciável em cada ponto $A \in GL(\mathbb{R}n)$ e sua derivada $df(A): L(\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n)$ é a aplicação linear

$$H \to -A^{-1} HA^{-1}. \qquad (3.45)$$

Exemplo 3.5. Considere uma matriz quadrada A de ordem 2. Então, uma simples verificação nos mostra que

$$d(\det)(A) \cdot H := \left(\frac{d}{dt} \det(A + \epsilon H) \right)_{\epsilon=0} = \det(A)\, tr(A^{-1}H) \qquad (3.46)$$

para qualquer matriz quadrada H de ordem 2. A expressão acima faz sentido mesmo quando $det\, A = 0$, pois $det(A)\, A^{-1}$ também está bem definida neste caso.

Vamos agora informalmente definir uma noção de diferenciabilidade para $J[\gamma]$ da seguinte maneira: dados uma forma bilinear simétrica $b \in B(M)$ e uma métrica *Riemanniana* $\gamma 0 \in RM(M) \subset B(M)$, então a derivada de J em $[\gamma_0]$ aplicada em b é

$$d\mathcal{J}[\gamma_0] \cdot b := \left(\frac{d}{d\epsilon}\, \mathcal{J}[\gamma_0 + \epsilon b] \right)_{\epsilon=0} \qquad (3.47)$$

ou equivalentemente, uma aplicação linear $dJ[\gamma_0] \in L(B(M); T^1{}_1(M))$ satisfazendo

$$\mathcal{J}[\gamma_0 + \epsilon b] = \mathcal{J}[\gamma_0] + \epsilon\, d\mathcal{J}[\gamma_0] \cdot v + o(\epsilon) \quad , \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0. \qquad (3.48)$$

De forma explícita, temos:

Teorema 3.9. A projeção $J[\gamma] : RM(M) \to CS(M)$, $\gamma \to J[\gamma]$ é diferenciável de acordo com a condição descrita na Equação (3.48) e sua derivada é a transformação linear $dJ[\gamma] = dJ \in L(B(M); T^1{}_1(M))$ dada por

$$d\mathcal{J}[\gamma] \cdot b = \frac{1}{2} tr(\gamma^{-1} \cdot b)\mathcal{J}[\gamma] - \gamma^{-1} \cdot b \cdot \mathcal{J}[\gamma] \,. \tag{3.49}$$

Na notação com índices, tomando $J^i{}_k := J[\gamma]^i{}_k$, a fórmula acima significa

$$(d\mathcal{J}[\gamma] \cdot b)^i_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{j,\ell=1}^{2} \gamma^{\ell j}\, b_{\ell j} \right) J^i_k - \sum_{j,\ell=1}^{2} \gamma^{i\ell}\, b_{\ell j} J^j_k \,. \tag{3.50}$$

Demonstração: Assim, determinemos explicitamente sua derivada. Consideremos $\omega[\gamma] = |\gamma|\, dx^1 \wedge dx^2$ e vamos denotar $d\omega[\gamma] \cdot b = \delta(\omega)$ e $dJ[x] \cdot b = \delta J$, onde por simplicidade $J = J[\gamma]$. Vamos reescrever nessa nova notação a equação acima 3.48 da seguinte forma:

$$J[\gamma + \epsilon b] = J[\gamma] + \epsilon \delta J \cdot b + o(\epsilon) \quad e \quad \omega[\gamma + \epsilon b] = \omega[\gamma] + \epsilon \delta \omega \cdot b + o(\epsilon) \quad , \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0. \tag{3.51}$$

onde

$$[\gamma + \epsilon b]^{-1} = \gamma^{-1} - \epsilon \gamma^{-1} b \gamma^{-1} + o(\epsilon) \,,\ \gamma_\epsilon(J_\epsilon \cdot u, v) = \omega_\epsilon(u, v) \tag{3.52}$$

ou de outra forma

$$(\gamma + \epsilon b)((J + \epsilon \delta J)u, v) = (\omega + \epsilon \delta \omega)(u, v). \tag{3.53}$$

Mas,

$$\sqrt{|\gamma + \epsilon b|} = \sqrt{\det(\gamma_{ij} + \epsilon\, b_{ij})} = \sqrt{|\gamma|} + \epsilon\, \delta \cdot b + o(\epsilon) \,.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\delta\gamma \cdot b &= \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\sqrt{\det(\gamma_{ij}+\epsilon b_{ij})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}}\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}[(\gamma_{11}+\epsilon b_{11})(\gamma_{11}+\epsilon b_{11})-(\gamma_{12}+\epsilon b_{12})^2] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}}(b_{11}\gamma_{22}+b_{22}\gamma_{11}-2\gamma_{12}b_{12}) \\
&= \frac{1}{2}tr(\gamma^{-1}\cdot b) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{ij}b_{ij}\sqrt{|\gamma|}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\omega[\gamma+\epsilon b] = \left(1+\frac{\epsilon}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\gamma^{ij}b_{ij}\sqrt{|\gamma|}\right)+o(\epsilon^2)\right)\omega[\gamma]$. *Logo,*

$$
\sum_{i=1}^{2}\left(\gamma_{ij}\delta J_i^j\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\delta\omega_{ij} - b_i J_i^j\right). \qquad (3.54)
$$

Substituindo a expressão encontrada para $\delta\omega$ na expressão para a derivada de J descrita em 3.51 encon- tramos (3.49).

No próximo resultado vamos descrever o núcleo da aplicação derivada *dJ [γ].*

Corolário 3.3. Uma forma bilinear b está no núcleo de *dJ [γ]* se, e só se, ela satisfaz a relação

$$
½ \, tr(\gamma^{-1} b) \, Id = \gamma^{-1} \cdot b \, , \qquad (3.55)
$$

ou seja, em coordenadas

$$
\frac{1}{2}\left(\sum_{j,\ell=1}^{2}\gamma^{\ell j}\, b_{\ell j}\right)\delta_k^i = \sum_{\ell=1}^{2}\gamma^{i\ell}\, b_{\ell k}\,. \qquad (3.56)
$$

De forma explícita, a matriz que representa a forma bilinear *b* em coordenadas é

$$
b = \begin{pmatrix} G & F \\ F & E \end{pmatrix}\frac{\chi}{E} \qquad (3.57)
$$

onde χ é uma função diferenciável no domínio do sistema de coordenadas.

Demonstração: Suponha que $b \in Ker(dJ[\gamma])$, isto é, $dJ[\gamma] \cdot b = 0$. Multiplicando ambos os membros da equação 3.49 por $J[\gamma] = J$ e usando o fato de que $J^2 = -Id$ concluímos que

$$\tfrac{1}{2}\, tr(\gamma^{-1} b) Id = \gamma^{-1} b.$$

Mas, como

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{|\gamma|}\begin{pmatrix} E & -F \\ -F & G \end{pmatrix}$$

e tomando a representação matricial da forma bilinear b como sendo

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\gamma^{-1} b = \frac{1}{|\gamma|}\begin{pmatrix} Eb_1 - Fb_3 & Eb_2 - Fb_4 \\ -Fb_1 + Gb_3 & -Fb_2 + Gb_4 \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

onde

$$tr(\gamma^{-1} b) = \frac{1}{|\gamma|}(Eb_1 - Fb_3 - Fb_2 + Gb_4). \tag{3.59}$$

Portanto, a equação 3.55 é equivalente à equação matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} tr(\gamma^{-1} b) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} tr(\gamma^{-1} b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Eb_1 - Fb_3 & Eb_2 - Fb_4 \\ -Fb_1 + Gb_3 & -Fb_2 + Gb_4 \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Dessa forma, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} Eb_2 - Fb_4 = 0 \\ -Fb_1 - Gb_3 = 0 \\ Eb_1 - Fb_3 - Fb_2 + Gb_4 = 2Eb_1 - 2Fb_3 \\ Eb_1 - Fb_3 - Fb_2 + Gb_4 = -2Fb_2 + 2Gb_4 \end{cases} \tag{3.61}$$

Em relação ao sistema acima podemos inicialmente observar que a soma das ultimas duas igualdades nos leva a uma identidade. Além disso, resolvendo explícitamente as duas primeiras equações do sistema obtemos as seguintes condições:

$$Eb_1 - Fb_4 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{F}{E} b_4$$
$$-Fb_1 + Gb_3 = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{G}{F} b_3$$

Substituindo os valores encontrados para b2 e b1 na equação

$$Eb_1 - Fb_3 = -Fb_2 + Gb_4$$

encontramos a condição

$$\Rightarrow \frac{|\gamma|}{F} b_3 = \frac{|\gamma|}{E} b_4 \Rightarrow b_3 = \frac{F}{E} b_4.$$

Logo, a demonstração está concluída.

dada uma pertubação de uma métrica *Riemann*iana γ_0, *i.e.,* uma curva γ_ϵ em *RM(M)* definida para $\epsilon \in I \subset R$, I intervalo aberto contendo *0,* $\gamma_0 = (\gamma_\epsilon)\ \epsilon=0$, diferenciável no sentido de que

$$b(p) := \left(\frac{d}{d\epsilon} \gamma_\epsilon(p) \right)_{\epsilon=0} \qquad (p \in M) \tag{3.62}$$

define um campo tensorial 2-covariante e simétrico em M. Assim, podemos escrever

$$\gamma\epsilon = \gamma + \epsilon\, b + o(\epsilon)\ . \tag{3.63}$$

A ideía de estudar o núcleo de *dJ [γ]* está relacionada com seguinte fato: γ_ϵ reprenta, em ordem linear em ϵ, uma "pertubação conforme" de γ_0 se, e somente se, *b* definida por (3.62) está no núcleo de *dJ [γ0]*, pois pelo Teorema 3.7 e a expansão em primeira ordem de *J* (3.48), temos

$$\gamma\epsilon \text{ é "pertubação conforme" de } \gamma 0 \leftrightarrow J[\gamma\epsilon] = J[\gamma 0] + o(\epsilon) \leftrightarrow b \in \ker(dJ[\gamma 0])\ . \tag{3.64}$$

Em coordenadas, uma pertubação conforme é dada por

$$\gamma_\epsilon = \begin{pmatrix} E + \epsilon\,\frac{G}{E}\chi & F + \epsilon\,\frac{F}{E}\chi \\ F + \epsilon\,\frac{F}{E}\chi & G + \epsilon\,\chi \end{pmatrix} + o(\epsilon) \tag{3.65}$$

para alguma função diferenciável χ definida no domínio do sistema de coordenadas.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Tensores e Campos Tensoriais

De maneira geral, o cálculo diferencial nos ensina a aproximar objetos (no caso, objetos ”suaves”) por objetos lineares. A estrutura de variedade diferenciável nos permite utilizar a teoria da álgebra linear para, também num certo sentido, ”aproximar” tais objetos de maneira independente da escolha do sistema de coordenadas. Assim, surge a idéia de ”tensor”.

Para cada $i \in \{1, . . . , n\}$, considere V_i e E espaços vetoriais reais. Diremos que uma aplicação $f : V_1 \times . . . \times V_n \to E$ é multilinear se para escalares $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ e cada $v_i \in V_i$,

$$f (v_1, . . . \alpha v_i + \alpha' v_i' , . . . , v_n) = \alpha f (v_1, . . . , v_i, . . . , v_n) + \alpha' f (v_1, . . . , v_i' , . . . , v_n). \qquad (A.1)$$

Ou seja, uma função é dita ser multilinear se ela for linear em cada variável separadamente. No nosso caso estaremos mais interessados nas funções **bilineares**, isto é, uma função multilinear de duas variáveis. Exemplos clássicos de funções multilineares são: produto interno em $\mathbb{R}^n$ e a função determinante, onde a primeira é uma função escalar bilinear de dois vetores e a segunda uma função escalar de n vetores.

Vamos inicialmente definir o conceito de tensor covariante em um espaço vetorial.

Definição A.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$. Dado um número $k \in N$, um **k-tensor covariante** em V é uma aplicação multilinear $f : V^k \to \mathbb{R}$, onde V^k denota o produto de k cópias de V. Se $k = 0$, um 0-tensor é simplesmente um escalar.

Para k natural ou nulo denotaremos por $T^k(V)$ o conjunto de todos os k-tensores em V. Dados um escalar α e $f, \tilde{f}$ k-tensores quaisquer, o espaço $T^k(V)$ naturalmente tem estrutura de espaço vetorial mediante as operações

$$(\alpha f)(v_1, . . . , v_k) := \alpha(f (v_1, . . . , v_k))$$
$$(f + \tilde{f})(v_1, . . . , v_k) := f (v_1, . . . , v_k) + \tilde{f}(v_1, . . . , v_k). \qquad (A.2)$$

A idéia por trás da definição de tensores covariantes é a seguinte: a descrição matemática das leis da natureza (podemos pensar por exemplo, em leis físicas) deve ser independente do sistema de coordenadas escolhido, isto é não existe **sistema de coordenadas preferido**. Logo, as equações matemáticas que desig- nam tais leis devem agir de maneira covariante, ou seja, invariantes em sua ”forma” perante mudança de coordenadas.

Dado um espaço vetorial real V denotamos por V^* como sendo o espaço vetorial dos funcionais lineares $\mu : V \to R$ e o chamamos de **espaço dual** de V.

Exemplo A.1. Uma aplicação linear $\mu : V \to \mathbb{R}$ é sempre multilinear. Logo, um 1-tensor covariante é simplesmente um vetor e podemos naturalmente indentificar $T^1(V) \approx V^*$. Analogamente, um 2-tensor covariante é uma aplicação bilinear de dois vetores e, portanto, podemos identificar o espaço $T^2(V)$ com o espaço das formas bilineares. De maneira geral, pensando em um determinante como sendo uma função multilinear de n vetores, então podemos indentifica-lo como um n-tensor covariante no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Vamos definir agora a idéia de k-tensor contravariante.

Definição A.2. Considere V um espaço vetorial de dimensão finita e seja V^* seu espaço dual. Um elemento do espaço $T^k(V^*)$ é chamado de **k-tensor contravariante.**

Apenas a fim de ilustração daremos o exemplo a seguir.

Exemplo A.2. Considere uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ em algum intervalo $I = (a, b) \subset R$. O vetor tangente a α em $t = t_0$ dado pela derivada da curva $\alpha'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ é um 1-tensor contravariante, isto é, um vetor contravariante.

Sabemos que naturalmente podemos fazer a identificação $V \approx (V^*)^*$. Se $dim(V) < \infty$, dada uma base ordenada $\{e_1, . . . , e_n\} \subset V$ existe uma única base ordenada $\{e^1, . . . , e^n\} \subset V^*$ tal que

$$\langle e^j, e_i \rangle = \delta_i^j =: \begin{cases} 1 \; se \; i \neq j. \\ 0, \; se \; i = j. \end{cases} \qquad \text{(A.3)}$$

O símbolo δ_i^j é chamado de **delta de Kronecker**[1]. Além disso, $\langle . \rangle$ denota o pareamento entre V e V^*.

Neste texto não precisaremos definir o que é um tensor n-covariante e m-contravariante para $n, m \neq 1$ pois iremos apenas falar sobre estruturas complexas em variedades. Assim:

Definição A.3. Um elemento do espaço $T^1{}_1(V) := T^{1+1}(V^*, V)$ é chamado de tensor do tipo 1-1, isto é, 1- covariante e 1-contravariante.

Precisamos "transportar" a idéia de tensores para o contexto das variedades. Começaremos a fazer isso a seguir.

Definição A.4. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e considere um ponto qualquer $p \in \mathbb{R}^n$. O espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ no ponto p é o espaço $T_p\mathbb{R}^n := \{p\} \times \mathbb{R}^n$.

$T_p\mathbb{R}^n$ com as operações

$$(p, v) + (p, w) := (p, v + w) \text{ e } \lambda(p, v) := (p, \lambda v) , \forall v, u \in TpRn \text{ e } \forall \lambda \in R \qquad (A.4)$$

1.Em homenagem ao matemático alemão Leopold Kronecker (1823-1891).

se torna um espaço vetorial. A projeção $\pi : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$(p, v) \rightarrow \pi(p, v) = v \qquad (A.5)$$

é um isomorfismo entre $T_p\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$. Logo, estes espaços podem ser identificados.

Queremos agora definir o espaço tangente a uma variedade M de dimensão n, em um ponto $p \in M$, T_pM. Para isso, o definiremos de modo que T_pM tenha estrutura de espaço vetorial e no caso, podemos identifica-lo com $\mathbb{R}^n$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $0 \in I$. Considere o conjunto

$$C(p) := \{\varphi : I \rightarrow M \,;\, \varphi(0) = p, \exists\varphi'(0)\}. \qquad (A.6)$$

Consideremos duas curvas φ1, φ2 є C(p). Diremos que φ1 e φ2 são equivalente se para toda carta ψi, p є dom(ψi), ocorrer

$$(\psi_i \circ \varphi_1)'(0) = (\psi_i \circ \varphi_2)'(0). \qquad (A.7)$$

A igualdade acima pode ser verificada para uma carta específica pois, se vale para esta carta valerá para qualquer outra. Tal relação é de equivalência e vamos denotar por [φ] a classe de equivalência da curva $\varphi \in C(p)$.

Definição A.5. O espaço tangente à variedade M no ponto p, $T_p(M)$, é o conjunto das classes de equivalência [φ] para uma curva qualquer φ є C(p).

Vamos mostrar agora que $T_p(M)$ tem estrutura de espaço vetorial. Consideremos uma carta qualquer ψi, $p \in dom(\psi i)$. A aplicação

$$D\psi i(p) : TpM \rightarrow \mathbb{R}^n, [\varphi] \mapsto (\psi i \circ \varphi)'(0) \qquad (A.8)$$

está bem definida, isto é, não depende da escolha da carta ψi e é bejetora. Logo $D\psi i(p)$ é um isomorfismo e $T_p(M)$ pode ser indentificado com Rn. Assim, Tp(M) naturalmente carrega a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos o espaço dual de $T_p(M)$ por $T_p{}^*(M)$ chamado de espaço cotangente a M no ponto p.

Agora podemos definir o conceito de campo tensorial em uma variedade M. Nos restringiremos ao nosso caso de interesse que são os campos tensoriais do tipo 1-1, isto é, campos tensoriais 1-covariante e 1-contravariante.

Definição A.6. Seja M uma variedade. Um campo tensorial do tipo 1-1 em M é uma escolha suave (diferenciável) de um tensor T_p do tipo 1-1 a cada ponto $p \in M$.

Na definição acima a palavra ”suave” é no seguinte sentido: Podemos enxergar um campo tensorial do tipo *0-1* como um campo vetorial e um campo tensorial T do tipo *1-0*

é simplesmente um vetor Tp a cada ponto $p \in M$. A diferenciabilidade nesse caso é que para cada campo vetorial suave X em M a aplicação $x \rightarrow T_p(X_p)$ é diferenciável. Nesse caso o conceito de campo vetorial suave é o usual, isto é, dado um ponto $p \in M$ um campo o associa por meio do espaço tangente T_pM a um espaço vetorial de modo que, em qualquer sistema de coordenadas φ sua representação é tal que cada uma de suas funções componentes são deriváveis. Além disso, devemos observar que se o campo é diferenciável em um atlas $(U, \varphi) \subset M$ ele também será diferenciável em qualquer outro atlas $(V, \psi) \subset M$. Isso é o mesmo que dizer que o conceito de diferenciabilidade de um campo em M como anteriormente está bem definido, isto é, não depende do sistema de coordenadas escolhido.

Considere M uma superfície. Seja $U \subset M$ domínio para um sistema de coordenas $\varphi = (x^1, x^2)$. Considere um ponto qualquer $p \in M$. Uma base para o espaço tangente $T_p(M)$ é dada por

$$\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \frac{\partial}{\partial x^2}(p)\} \subset T_p(M) \qquad \text{(A.9)}$$

onde,

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^{-1}(x_0^1 + t, x_0^2) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x^2}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^{-1}(x_0^1, x_0^2 + t) \quad , \quad \varphi(p) = x_0. \qquad \text{(A.10)}$$

As condições acima podem ser reescritas sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^{-1}(\varphi(p) + (t, 0)) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x^2}(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^{-1}(\varphi(p) + (0, t)). \qquad \text{(A.11)}$$

Uma base dual para o espaço $T_p{}^*M$ é

$$\{dx^1(p), dx^2(p)\} \subset T_p{}^*M \qquad \text{(A.12)}$$

onde, para cada $i = 1, 2$, $dx^i(p)$ é a derivada da aplicação $x^i: U \rightarrow R$ dada pela projeção

$$x^i(q) = \pi_i(\varphi(q)) \qquad \text{(A.13)}$$

onde $\pi^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $(x^1, x^2) \rightarrow x^i$, $1 \leq i \leq 2$.

Resumindo o que foi visto nesse tópico, para o nosso contexto de superfícies temos que:

1. (Propriedade de Tensor Covariante). Dados sistemas de coordenadas $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial}{\partial x^{2'}}\right)$ o protótipo de tensor covariante é quando este se relaciona por meio de mudança de coordenadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x^{1'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial}{\partial x^2} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x^{2'}} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}}\frac{\partial}{\partial x^2}. \tag{A.14}$$

2. (Propriedade de Tensor Contravariante). Dados sistemas de coordenadas (dx^1, dx^2) e $(dx^{1'}, dx^{2'})$ o protótipo de tensor contravariante é quando este se relaciona por meio de mudança de coordenadas da seguinte forma:

$$dx^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}dx^2 \quad e \quad dx^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2}dx^2. \tag{A.15}$$

3. (Interpretação Algébrica e Geométrica de Objetos Lineares). Um espaço vetorial V é identificado com o espaço tangente a um ponto p de uma variedade M, T_pM. Uma base de um espaço vetorial V, digamos $dim(V) = 2$, $\{e1, e2\}$ pode ser geométricamente interpretado como uma base no espaço tangente $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \frac{\partial}{\partial x^2}(p)\} \subset T_pM$. De maneira análoga para a base dual $\{e^1, e^2\} \subset V^*$ podemos interpreta-la geometricamente como uma base no espaço cotangente $\{dx^1(p), dx^2(p)\} \subset T^*_pM$.

Vamos a seguir, para finalizar esse tópico, apresentar um exemplo bastante elementar apenas para ilustrar o que foi feito. Cabe ressaltar que a matriz que representa uma mudança de base no contexto geométrico é dada pela matriz jacobiana da transformação de coordenadas. Além disso, a matriz inversa dessa mudança de base é dada pela inversa da matriz jacobiana da mesma transformação de coordenadas.

Exemplo A.3. (Coordenadas Polares). Considere a função (que podemos pensar como um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y) \to f(x, y) := (x, y)$. As coordenadas polares de x, y são dadas respectivamente por $x = r \cos \theta$, $y = r\, sen\theta$. A matriz jacobiana de f em um ponto (r, θ) é dada por

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\, sen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

e seu determinante $|Jf(r, \theta)| = r$ e, portanto, positivo se $r > 0$. Um subconjunto no qual f é inversível é $U := \{(r, \theta); r > 0, \theta \in (0, 2\pi)\}$. Nesse caso, a matriz jacobiana de f^{-1} é dada por

$$J_f^{-1}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -\, sen\theta/r & \cos\theta/r \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Neste caso, $f(U) = \mathbb{R}^2/A$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0, x > 0\}$, isto é, o plano deletado o semi-eixo real positivo.

APÊNDICE B

O Teorema da Uniformização Para Superfícies Compactas

Como colocado anteriormente, nossa principal referência para demonstração do teorema 2.14 é o livro [1].

Inicialmente relembramos o conceito de *n*-formas em espaços vetoriais e variedades. A fim de exemplificação, vamos nos restringir ao nosso caso de superfícies. Seja E um espaço vetorial, $dim(E) = 2$. Uma 0-forma em E é simplesmente um escalar. Já uma 1-forma é um funcional linear $\alpha \in E^*$. Finalmente uma 2-forma em E é uma forma bilinear anti-simétrica, isto é, dados $(u, v) \in E$ e $\{e^1, e^2\}$ base de E* então

$$(e^1 \wedge e^2 (u, v) := \tfrac{1}{2} (e^1 (u)e^2 (v) - e^1 (v)e^2 (u)) \qquad \text{(B.1)}$$

é tal que $(e^1 \wedge e^2)(u, v) = -(e^1 \wedge e^2)(v, u)$. No contexto de uma superfície de Riemann M uma 0-forma é simplesmente uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Já uma 1-forma diferenciável é dada por

$$\alpha = \alpha_1(x)dx^1 + \alpha_2(x)dx^2. \qquad \text{(B.2)}$$

Finalmente uma 2-forma diferenciável é dada por

$$\beta = \alpha(x)dx^1 \wedge dx^2. \qquad \text{(B.3)}$$

Definimos $\Omega^0(M), \Omega^1(M), \Omega^2(M)$ como sendo os espaços das funções holomorfas, espaço das 1-formas e espaço das 2-formas em M, respectivamente. Além disso, definimos

$$H^1(M) := ker(d : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^2(M))/Im(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)) \qquad \text{(B.4)}$$

como sendo o grupo de cohomologia de de Rham onde d é a operação de derivação exterior.

Sabemos que se uma forma diferencial α é exata então ela é fechada. Se M for simplesmente conexa então toda forma fechada α é exata, isto é, $H^1(M) = 0$.

Agora queremos definir o conceito de formas holomorfas. Consideremos uma coordenada complexa local $z = x + iy$. Então, $dz = dx + idy$ e $dz = dx - idy$. Assim, entendemos que uma (1, 0)-forma é localmente expressa como αdz e uma (0, 1)-forma é localmente expressa como $\beta\bar{z}$ para funções α, β. Diremos que neste sistema de coordenadas locais f é holomorfa e escreveremos $df = \partial f = f'(z)dz$ se $\partial f = 0$ significando que f cumpre as equações de *Cauchy-Riemann* 1.1. Assim, diremos que uma (1, 0)-forma α é uma 1-forma holomorfa se $\partial\alpha = 0$. Assim, uma 1-forma holomorfa pode ser expressa como Adz onde A é uma função holomorfa.

Vamos denotar por $\Omega^{1,0}(M)$ o espaço das (1, 0)-formas em M e $\Omega^{0,1}$ o espaço das

(0, 1)-formas em M. Em uma coordenada local $z = x + iy$ entenderemos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{(B.5)}$$

como sendo operadores, no caso ∂ em $\Omega^{0,1}(M)$ e $\bar{\partial}$ em $\Omega^{1,0}(M)$.

Definimos agora

$$H^{1,0}(M) = \ker\bar{\partial} : \Omega^{1,0} \to \Omega^2 \text{ e } H^{0,1}(M) = \operatorname{coker}\bar{\partial} : \Omega^0 \to \Omega^{0,1}. \qquad \text{(B.6)}$$

Assim, $H^{1,0}(M)$ é o espaço das 1-formas holomorfas e $H^{0,1}(M)$ é um espaço associado a construção de funções meromorfas. Para maiores detalhes do se segue consultar [1], capítulo 8 na página 114, teorema 6. Temos a seguinte decomposição $H^1(M) = H^{0,1}(M) \oplus H^{1,0}(M)$. De maneira simplificada esse fato decorre de que a aplicação $H0,1(M) \oplus H1,0(M) \to H1(M)$ dada por

$$(\alpha, \theta) \to i(\alpha) + \overline{i(\sigma - 1(\theta))} \qquad \text{(B.7)}$$

é um isomorfismo, onde a aplicação $\sigma : H1,0 \to \overline{H^{0,1}}$ é induzida por $\alpha \to \bar{\alpha}$. Para um superfície de *Riemann* M simplesmente conexa $H^1(M) = \{0\}$ e, consequentemente $H^{0,1}(M) = \{0\}$, de acordo com a decomposição descrita acima.

Vamos agora para a demonstração do teorema 2.14.

Demonstração: Seja M uma superfície de *Riemann* simplesmente conexa e compacta. De acordo com o teorema 1.2, basta mostrarmos que existe uma função meromorfa em M com um único polo de ordem 1. Consideremos $\alpha \in \Omega^1(M)$. Assim, $d\alpha = 0$ se, e só se, $\alpha = d\phi$ para alguma $\phi \in F(M)$. Logo, $H^1(M) = \{0\}$. Consideremos em torno de um ponto $p \in M$ um sistema de coordenadas (U, ϕ) e uma função $\beta : M \to \mathbb{R}$ suave, isto é, de classe $C\infty$ tal que $\beta = 1$ em uma vizinhança $p \in \tilde{U} \subset U$ e $\beta = 0$ em M/U. Vamos mostrar então a existência de uma função $f : M \to S^2$ como um único polo de ordem 1. Para isso vamos definir

$$f(z) := g(z, \overline{z}) + \beta\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{(B.8)}$$

onde g é uma função de classe $C\infty$ e f holomorfa, isto é,

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{z}\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}} = 0. \qquad \text{(B.9)}$$

A forma $\alpha = \frac{1}{z}\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}}$ tem suporte compacto nas vizinhanças de p e é uma 1-forma holomorfa já que $\bar{\partial}\alpha = 0$. Em particular, nas vizinhanças de p, α é uma (0, 1)-forma, isto é,

$\alpha \in \Omega^{0,1}(M)$ pois se $\alpha(p) = 0$ então $\alpha = \frac{1}{z}\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}}$. Dessa forma uma tal função g existe, isto é, g é holomorfa se, e só se, $[\alpha] \in H^{0,1}$. Isto é equivalente a dizer que existe solução da equação $\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}} = -\alpha$ se, e só se, a classe $[\alpha]$ no espaço quociente $H^{0,1}$ é a classe nula. Dessa forma, existe $p_0 \in M$ tal que $\alpha = \partial(\frac{1}{z}\beta)$ em $M/\{p_0\}$. Assim, vamos supor que $\alpha(p) := 0$. Logo, $\alpha \in \Omega 1(M)$ e $\partial\alpha = 0$ e, portanto, $\alpha = -\bar{\partial}g$ para alguma função g de classe C^∞ em M, isto é, $g \in F(M)$ pois, como M é simplesmente conexa então $H^{0,1}(M) = \{0\}$. Portanto, $g + \frac{1}{z}\beta$ é holomorfa em $\mathbb{C}/\{p0\}$, onde o ponto p_0 é seu único polo (em particular de ordem 1). Finalmente, $f: M \to S2$ em um sistema de coordenadas complexas $z = x + iy$ dada por

$$z \mapsto f(z) := g(z) + \beta(\frac{1}{z}) \tag{B.10}$$

onde g de classe C^∞ em M e $\alpha \in \Omega^{0,1}(M)$ satisfazendo a equação $\frac{\partial\beta}{\partial\bar{z}} = -\alpha$ e β uma função do tipo "cut- off" em uma vizinhança de $p \in M$, isto é, uma função suave com suporte em U valendo 1 nas vizinhanças de p, é uma função meromorfa em M com um único pólo de ordem 1.

REFERÊNCIAS

1. Donaldson, S.K., Riemann Surfaces., Oxford Graduate Texts in Mathematics (2011).

2. Beardon, A.F., A Primer on Reimann Surfaces., Cambridge University Press (1984).

3. Lee, John., Introduction to Topological Manifolds., First Edition. Springer (2000).

4. Lee, John., Introduction to Smooth Manifolds., Springer (2002).

5. Conlon, Lawrence., Differentiable Manifolds., Second Edition., Modern Birkhäuser Classics. (2001).

6. Shoshichi, Kobayashi., Katsumi, Nomizu., Foundations of Differential Geometry Volume II., Interscience Publishers - John Wiley and Sons (1969).

7. Mikio, Nakahara., Geometry, Topology and Physics, Second Edition., Graduate Student Series in Physics; Taylor and Francis Group (2003).

8. Wolf, Joseph A.. Spaces of Constant Curvature, Sixth Edition., AMS Chelsea Publishing. (2010).

9. Atiyah, M. The Non-Existent Complex 6-sphere. arXiv:1610.09366v2 (2016).

10. do Carmo, M. P. . Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Sexta Edição, Editora SBM. (2014).

11. Scheidemann, Volker., Introduction to Complex Analysis in Several Complex Variables., Birkhäuser (2005).

12. Sebastiani, Marcos., Funções Analíticas de Várias Variáveis Complexas., Editora Impa. (1979).

13. Lang, Serge. Complex Analysis., Fourth Edition, Springer (1999).

14. Conway, John. Functions of one Complex Vairable., Springer (1973).

15. Ávila, Geraldo., Variáveis Complexas e Aplicações., Reimpressões 1994 e 1996., Editora LTC. (1990).

16. Shokranian, S., Variável Complexa 1., Editora UNB (2002).

17. Brown, James Ward., Churchill, Ruel Vance., Variáveis Complexas e Aplicações, Nona Edição, Editora Mc Graw Hill Education (2015).

SOBRE OS AUTORES

JOÃO FRANCISCO PINTO LUCAS - é bacharel e mestre em matemática pela universidade federal de Itajubá (Unifei) e doutorando em matemática pela universidade federal do ABC paulista (UFABC).

LEANDRO GUSTAVO GOMES - possui graduação em Matemática pela Universidade de São Paulo (2002) e doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade de São Paulo (2007). Atualmente é professor associado I da Universidade Federal de Itajubá.

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

A projeção canônica entre Estruturas Riemaniannas e Complexas em Superfícies

Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

A projeção canônica entre Estruturas Riemaniannas e Complexas em Superfícies

Ano 2021